

Mit Rückenwind und Sonnenkraft

Ambergreen – eine Vision wird wahr



Vorrundenaufgabe der 28. Alympiade
18. November 2016

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Alympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

Eric van Dijk
Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan
Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas
Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Deutschland

Kim Kaspers
Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Ruud Stolwijk
CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers
Freudenthal Instituut, Utrecht

Mit Unterstützung von:
Milad Zareie
House of Mathematics, Isfahan, Iran

Sekretariat:

Liesbeth Walther und Mariozee Wintermans
Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Alympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Die Universitäten zu Bonn und zu Münster
- Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande
- CASIO, Amstelveen
- Texas Instruments, Utrecht

Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2016/2017

Liebe Schülerinnen und Schüler,

ihr beteiligt euch heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von euch verlangt. Diese Aufgabe der Mathematik-Alympiade besteht aus fünf einzelnen Aufgaben und einer zweiteiligen Abschlussaufgabe. Die ersten fünf Aufgaben bilden die Vorarbeit für die Abschlussaufgaben: Alle hierbei erzielten Ergebnisse und Einsichten sind erforderlich, um die Abschlussaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können.

Die folgenden Hinweise solltet ihr unbedingt beachten:

- Lest zunächst den ganzen Aufgabentext gründlich durch, so dass ihr einen Überblick über die zu bearbeitenden Aufgaben bekommt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben habt ihr 7 Stunden Zeit. Plant unbedingt genügend Zeit (ca. 3 Stunden) für die Abschlussaufgabe ein. Auch das Ausformulieren und Aufschreiben der Lösungen kostet viel Zeit.
- Wenn ihr arbeitsteilig arbeitet, dann stellt einander eure Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor, bevor ihr mit der Abschlussaufgabe beginnt.
- Wenn ihr während der Bearbeitung der Aufgaben bestimmte Methoden oder Vorgehensweisen aus vorherigen Aufgaben abändert, beschreibt dann in eurer Ausarbeitung diese Anpassungen und begründet diese auch.
- Ihr dürft für die Bearbeitung der Aufgaben Bücher und einen Computer mit Internetanschluss benutzen. Es kann sinnvoll sein, Excel oder eine andere Tabellenkalkulation zu verwenden.

Bestandteile eurer Ausarbeitung:

- Ausarbeitung der Abschlussaufgabe (Achtung: Diese besteht aus zwei Teilen, nämlich einem Flyer und einem Bericht.)
- als Beilage die Ausarbeitungen zu den fünf Aufgaben

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eure Arbeit in digitaler Form als pdf-Dokument. Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!

Mit Rückenwind und Sonnenkraft

Ambergreen - eine Vision wird wahr

Amberhavn ist in den letzten Jahren stark gewachsen und aus diesem Grund wird eine neue Siedlung gebaut. Da es eine moderne und nachhaltige Siedlung werden soll, wird sie den Namen Ambergreen erhalten. Auch die Lage ist bereits bekannt: Es ist der südöstlichen Stadtrand (s. Karte auf dem Deckblatt).

In Ambergreen soll eine nachhaltige Energieversorgung verwirklicht werden. Insbesondere soll versucht werden, diese Siedlung energieneutral zu bauen.

Darum wurde entschieden, das folgende Experiment durchzuführen: Die neuen Bewohner der 175 geplanten Häuser sind zusammen für die Erzeugung erneuerbarer Energien verantwortlich. Sie beschließen gemeinsam, ob und wie Sonnen- und Windenergie erzeugt und genutzt werden kann. Die Kosten werden gleichmäßig unter den Bewohnern aufgeteilt. Die Bewohner möchten jedoch nicht alle Entscheidungen alleine treffen und vereinbaren daher gemeinsam mit der Gemeindeverwaltung von Amberhavn das Hinzuziehen eines unabhängigen Expertenteams.

Aufgaben

Um die Bewohner von Ambergreen bei ihrer Planung der Energieversorgung beraten zu können, müsst ihr euch mit einigen Daten zur Energiewinnung und dem durchschnittlichen Energiebedarf von Haushalten auseinandersetzen.

In den ersten fünf Aufgaben untersucht ihr die durchschnittlichen Kosten pro Haushalt für verschiedene Energiequellen sowie die Wetterabhängigkeit der Erträge dieser Quellen. Die Daten, mit denen ihr rechnet, sind oft vereinfacht, beruhen aber auf realistischen Gegebenheiten.

Eine wichtige Einheit, mit der gerechnet wird, ist kWh. Diese Abkürzung steht für Kilowattstunde und ist eine Einheit für die Energie. Sie wird oft im Zusammenhang mit elektrischer Energie benutzt. Wenn ein elektrisches Gerät mit einer Leistung von 1kW (1 kW = 1 Kilowatt = 1000 Watt) eine Stunde lang betrieben wird, so wird dabei eine Energie von 1kWh umgesetzt.

Aufgabe 1: Energiekosten

Bestimmt unter Zuhilfenahme der unten stehenden Daten die Kostendifferenz pro Haushalt zwischen zwei verschiedenen Arten der Energieerzeugung: Einmal wird der Energiebedarf vollständig durch fossile Energieträger gedeckt (Gas- und Kohlekraftwerke) und im anderen Fall wird die elektrische Energie durch Solarkollektoren erzeugt. In beiden Fällen nutzen die Haushalte Gas für die Versorgung mit warmem Wasser und für die Heizung. Stellt eure Berechnungen so übersichtlich wie möglich dar.

Daten:

- Der durchschnittliche Energieverbrauch pro Haushalt und Jahr beträgt 3500 kWh an elektrischer Energie (Strom) und 1500 m³ Gas.
- Der Strompreis bei Erzeugung in einem Kohlekraftwerk (also fossile Energie) beträgt für einen Haushalt durchschnittlich 17 cent pro kWh. Darin enthalten sind Fixkosten, Steuern und staatliche Zuschüsse.
- Für Gas zahlt man durchschnittlich 28 Cent pro m³ sowie zusätzlich 26 Cent Energiesteuer pro m³ Gas. Hinzu kommen Fixkosten, die rund 195 Euro pro Jahr (inklusive Mehrwertsteuer) betragen.
- Für die Sonnenenergie zahlt man keinen Beitrag an die Netzbetreiber, aber man muss natürlich die Anschaffungskosten zahlen. Sonnenkollektoren kosten etwa 300 Euro pro m², und 1 m² Sonnenkollektor erzeugt durchschnittlich 150 kWh Energie pro Jahr. Ein Kollektor hat eine Lebenszeit von etwa 20 Jahren.

Aufgabe 2: Heizen mit Gas oder Strom

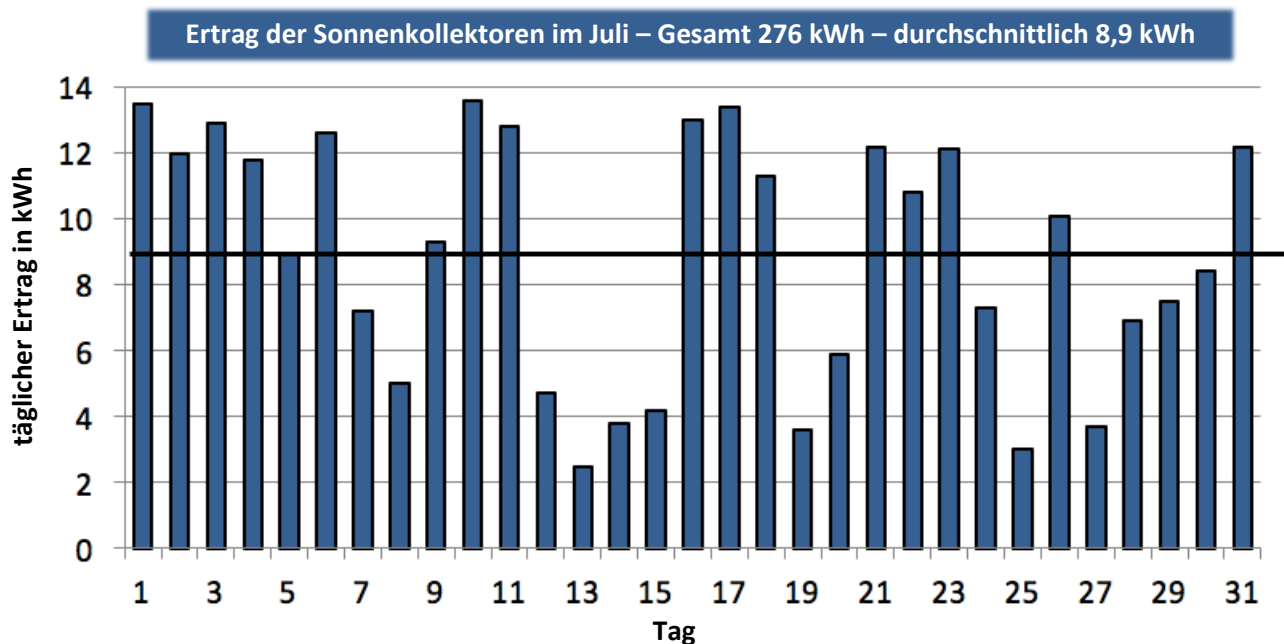
Wenn man sein Haus und das Wasser (zum Spülen, für die Dusche und dergleichen) mit Strom anstatt mit Gas heizen möchte, dann benötigt man zusätzlich 18.500 kWh elektrische Energie.

Berechne die jährlichen Heizkosten eines Hauses (inklusive Warmwasser), wenn die Erwärmung auf eine der drei folgenden Arten stattfindet:

1. mit Gas
2. mit elektrischer Energie, die nur durch fossile Brennstoffe erzeugt wird
3. mit elektrischer Energie, die nur durch Sonnenkollektoren erzeugt wird

Aufgabe 3: Sonnenkollektoren

Natürlich ist die Situation in Wirklichkeit ein bisschen komplizierter als in der letzten Aufgabe. Das hat vor allem mit den Schwankungen bei der Erzeugung von Solarenergie sowie beim Energieverbrauch zu tun.



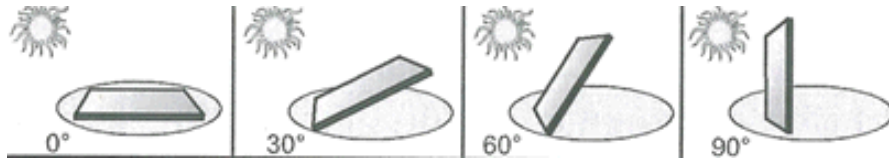
Der Haushalt mit Sonnenkollektoren aus dem oben abgebildeten Diagramm benötigt durchschnittlich 8 kWh elektrische Energie pro Tag. Aufgrund der Tatsache, dass in diesem Monat 8,9 kWh Energie pro Tag erzeugt wurde (s. schwarze Linie im Diagramm), müsste das ausreichen. Dennoch gibt es im Monat Juli einige Tage, an denen der Haushalt zu wenig elektrische Energie zur Verfügung hatte.

Berechne das gesamte Defizit an elektrischer Energie für diesen Haushalt im Monat Juli.

Aufgabe 4: Ausrichtung von Sonnenkollektoren

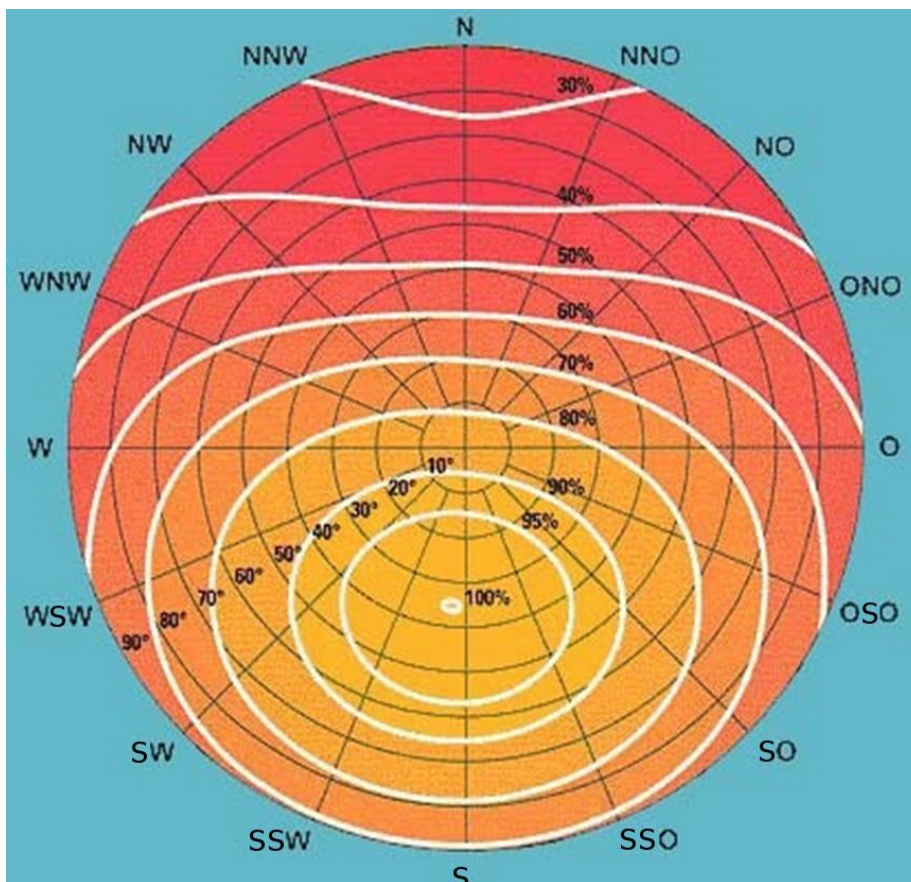
Neben den Schwankungen der Strahlungsintensität ist der Ertrag eines Sonnenkollektors (d.h. die täglich gewonnene Menge an elektrischer Energie) auch von der Ausrichtung abhängig. Dabei spielen zwei Faktoren eine Rolle:

1. Der **Neigungswinkel**, d.h. der Winkel zwischen dem Kollektor und dem Erdboden (siehe auch die folgende Abbildung).

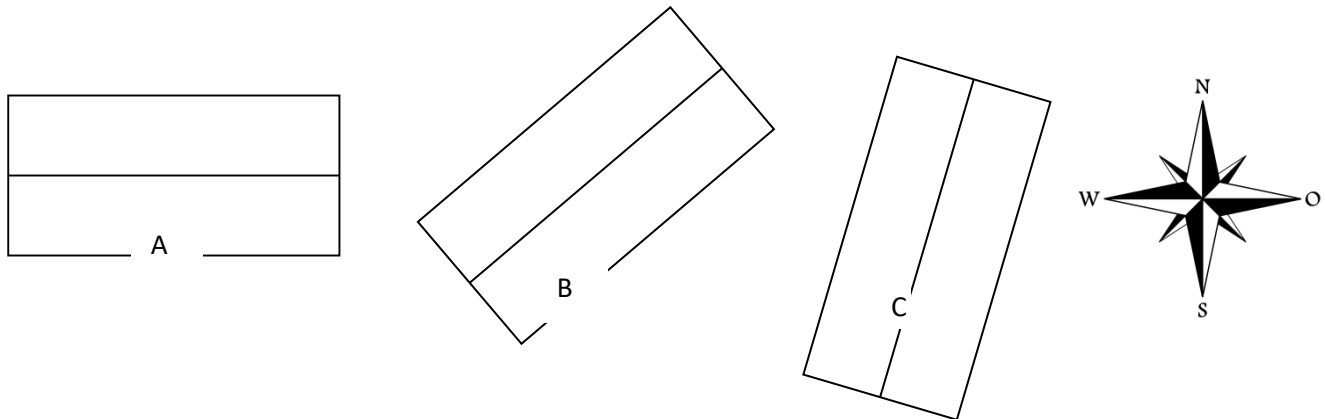


2. Die **Ausrichtung** des Hauses: Ein Haushalt mit Sonnenkollektoren in südlicher Richtung profitiert mehr von der Solarenergie als ein Haus, das diese lediglich in östlicher oder westlicher Richtung anbringen kann.

Das unten stehende Diagramm bietet eine Übersicht über verschiedene Erträge eines Sonnenkollektors in Abhängigkeit von der Richtung der Sonnenkollektoren und des Neigungswinkels, unter dem dieser angebracht ist. (**Bemerkung: In Anlage C findet ihr noch eine größere Version dieses Diagramms**)



Bestimmt den maximalen Ertrag und den idealen Neigungswinkel für Solarkollektoren der drei Häuser, die wie unten abgebildet ausgerichtet sind:



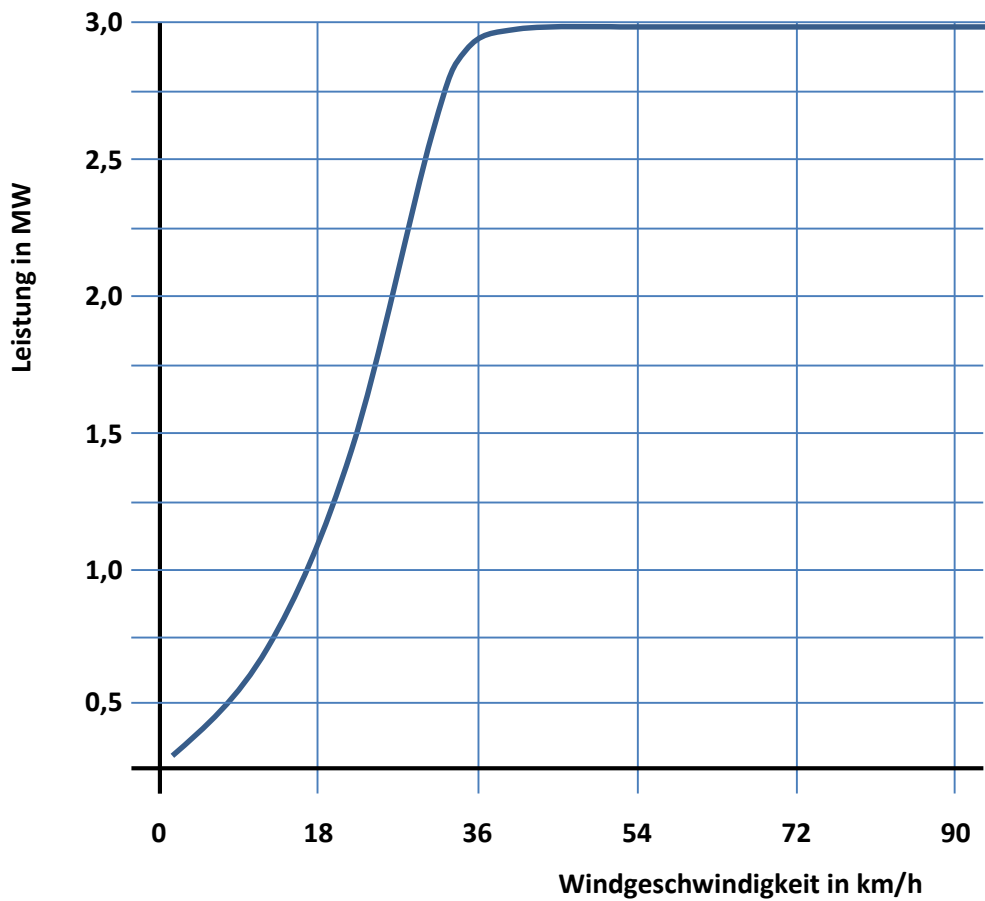
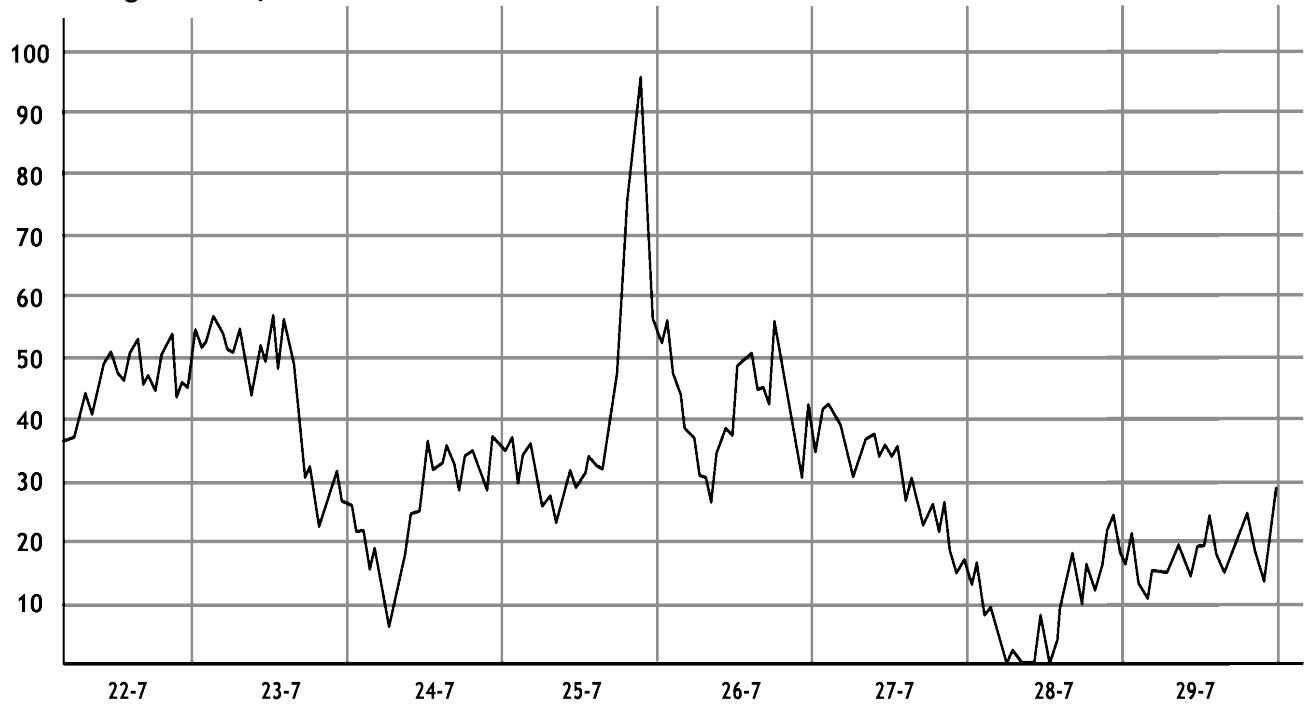
Aufgabe 5: Windenergie

Bislang haben wir uns nur mit Solarenergie beschäftigt. Eine andere erneuerbare Energiequelle ist der Wind. Ein Windrad (offiziell "Windturbine" genannt) wandelt Windenergie in elektrische Energie um. Wieviel elektrische Energie ein Windrad erzeugt, hängt u.a. von der Windgeschwindigkeit, ab. Natürlich spielt die Größe des Windrades auch eine Rolle. Es gibt sehr große Windkraftanlagen mit einer Leistung von 3 MW (= 3 Megawatt = 3000 kW), aber es gibt auch kleinere Windräder, die man beispielsweise auf dem Hausdach anbringen kann und die nur eine Leistung von 0,5 kW haben (s. Foto oben).



Bei Windrädern spielt ein ähnlicher Effekt wie bei den Sonnenkollektoren eine Rolle. Die Windgeschwindigkeit variiert von Tag zu Tag und von Tageszeit zu Tageszeit. Während bei der Sonnenenergie ein deutlich saisonabhängiger Verlauf zu erkennen ist (und diese nachts komplett wegfällt), gibt es bei der Windkraft keinen deutlich periodischen Verlauf. Im unten stehenden Diagramm sieht man den Verlauf der Windgeschwindigkeit in km/h an einem bestimmten Ort in Amheravn innerhalb einer bestimmten Woche. In der darunter stehenden Abbildung erkennt man, welche Leistung bei verschiedenen Geschwindigkeiten erzeugt wird.

Geschwindigkeit in km/h



Bestimmt so gut wie möglich, wie viel Energie dieses Windrad in der Woche vom 23. bis einschließlich 29. Juli erzeugt hat.

Hinweis: Wie weiter oben bereits angemerkt wurde, ist kWh eine Einheit für die Energie. Beispiel: Wenn man ein elektrisches Gerät mit einer Leistung von 2 MW (also 2000 kW) 10 Stunden lang in Betrieb hat, so hat man $2.000 \text{ kW} \cdot 10 \text{ h} = 20.000 \text{ kWh}$ Energie umgesetzt.

Abschlussaufgabe

Ambergreen möchte bei der Stromversorgung gerne vollständig auf erneuerbare Energie umsteigen. Im Jahr 2016 ist dies noch nicht möglich, weil die Leistung eines Sonnenkollektors pro m^2 noch zu niedrig ist. Man erwartet aber, dass sich der Ertrag in einigen Jahren verdoppeln wird – und das ist durchaus realistisch.

Ein Haushalt kann zwischen drei Optionen wählen: ein großer Sonnenkollektor, ein kleiner Sonnenkollektor und ein kleines Windrad, oder nur ein größeres Windrad. Bei den Windrädern gibt es die Auswahl aus drei verschiedenen Typen. Für einen Sonnenkollektor ist es natürlich am günstigsten, wenn er nach Süden ausgerichtet ist. Aber natürlich sind nicht alle Häuser nach Süden ausgerichtet, was ihr auf der obigen Karte für die geplante Siedlung Ambergreen erkennen könnt.



(Bemerkung: In Anlage D gibt es eine vergrößerte Version dieser Karte).

Ambergreen hat sich zum Ziel gesetzt, dass alle Bewohner das ganze Jahr über (also jeden Monat) ihre elektrische Energie mit Hilfe von erneuerbaren Energieformen erzeugen. Leider ist es derzeit noch nicht möglich, den Überschuss an erzeugter Energie in ein Netz einzuspeisen. Auch die Speicherung mit Hilfe von Akkus erweist sich als noch nicht rentabel.

Der Verbrauch an elektrischer Energie pro Haus kann variieren, aber ein durchschnittlicher Haushalt benötigt jährlich im Schnitt 3600 kWh elektrische Energie. Da für die Heizung und das warme Wasser nach wie vor Gas verwendet wird, können wir davon ausgehen, dass der monatliche Bedarf an elektrischer Energie von Monat zu Monat nur sehr geringfügig schwankt.

Alle Daten und Informationen zu Sonnenkollektoren und Windrädern findet ihr in den Anlagen A und B.

Arbeitsaufträge

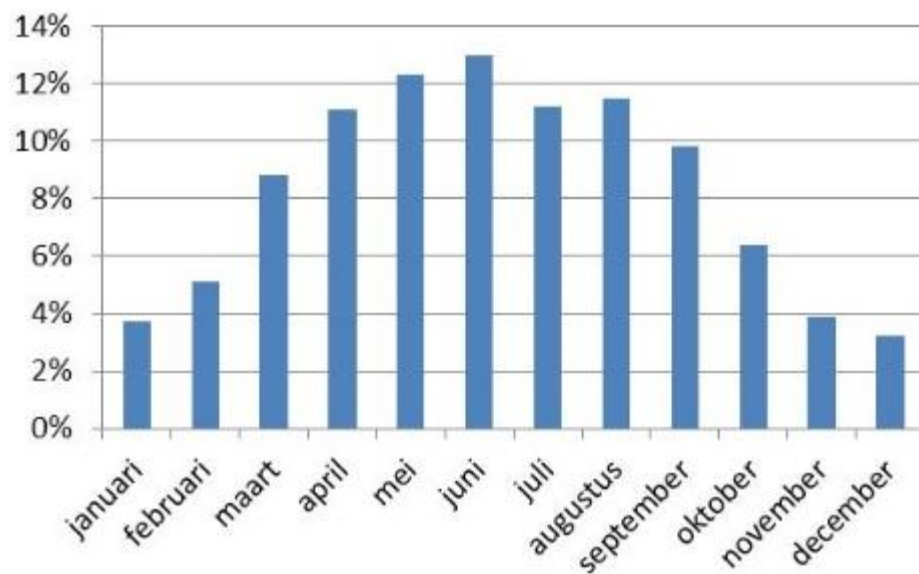
Für jedes Haus von Ambergreen muss abhängig von seiner Lage eine andere Empfehlung in Bezug auf die Anschaffung von Sonnenkollektoren oder Windrädern gegeben werden. Und natürlich müssen Alternativen genannt werden, wenn jemand z.B. grundsätzlich kein Windrad auf seinem Haus haben möchte – oder keine Sonnenkollektoren.

1. Der Siedlungsrat von Ambergreen bittet euch darum, als Entscheidungshilfe einen Flyer zu erstellen, mit dessen Hilfe jeder Haushalt in Ambergreen für sich eine optimale Wahl zwischen Sonnenkollektoren und/oder Windrädern treffen kann. Der Flyer soll im DIN-A4-Format erstellt werden.
2. Der Siedlungsrat möchte weder die Hersteller von Sonnenkollektoren noch die Produzenten von Windrädern bevorzugen, sondern den Bewohnern eine objektive Hilfestellung geben, die sie zu einer für sie optimalen Entscheidung führt. Darum müsst ihr zusätzlich in einem Bericht an den Siedlungsrat gut belegen, dass eure Entscheidungshilfe zu einer optimalen Entscheidung anleitet und dabei keine der beiden Energiegewinnungsarten bevorzugt behandelt.

Anlage A

Sonnenkollektoren

- Preis für ein großes Set Sonnenkollektoren (30 m²): € 9000,-
- Preis für ein kleines Set Sonnenkollektoren (20 m²): € 6000,-
- Die Sonnenkollektoren haben eine Lebensdauer von 20 Jahren.
- Die Sonnenkollektoren müssen in einem Neigungswinkel von 40° angebracht werden.
- Der Ertrag hängt von der Richtung ab, in der das Haus gebaut ist, und kann aus dem Diagramm in Anlage C abgelesen werden.
- Der maximale Ertrag pro Jahr in Nord-Süd-Richtung: 330 kWh pro Jahr und m².
Diese 330 kWh sind wie folgt über die Monate verteilt:



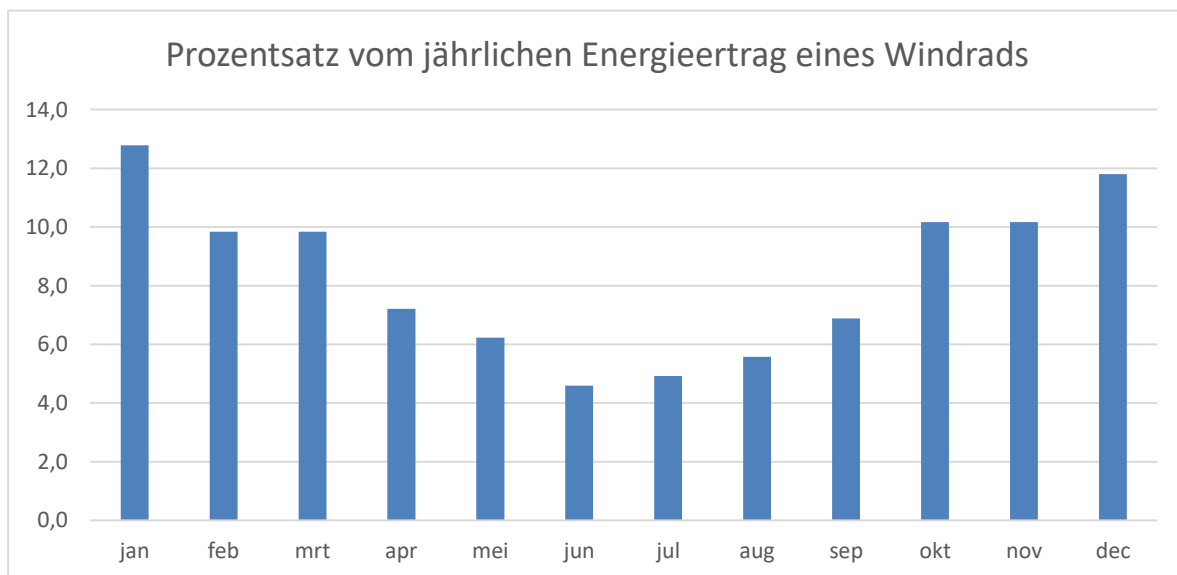
Anlage B

Windräder

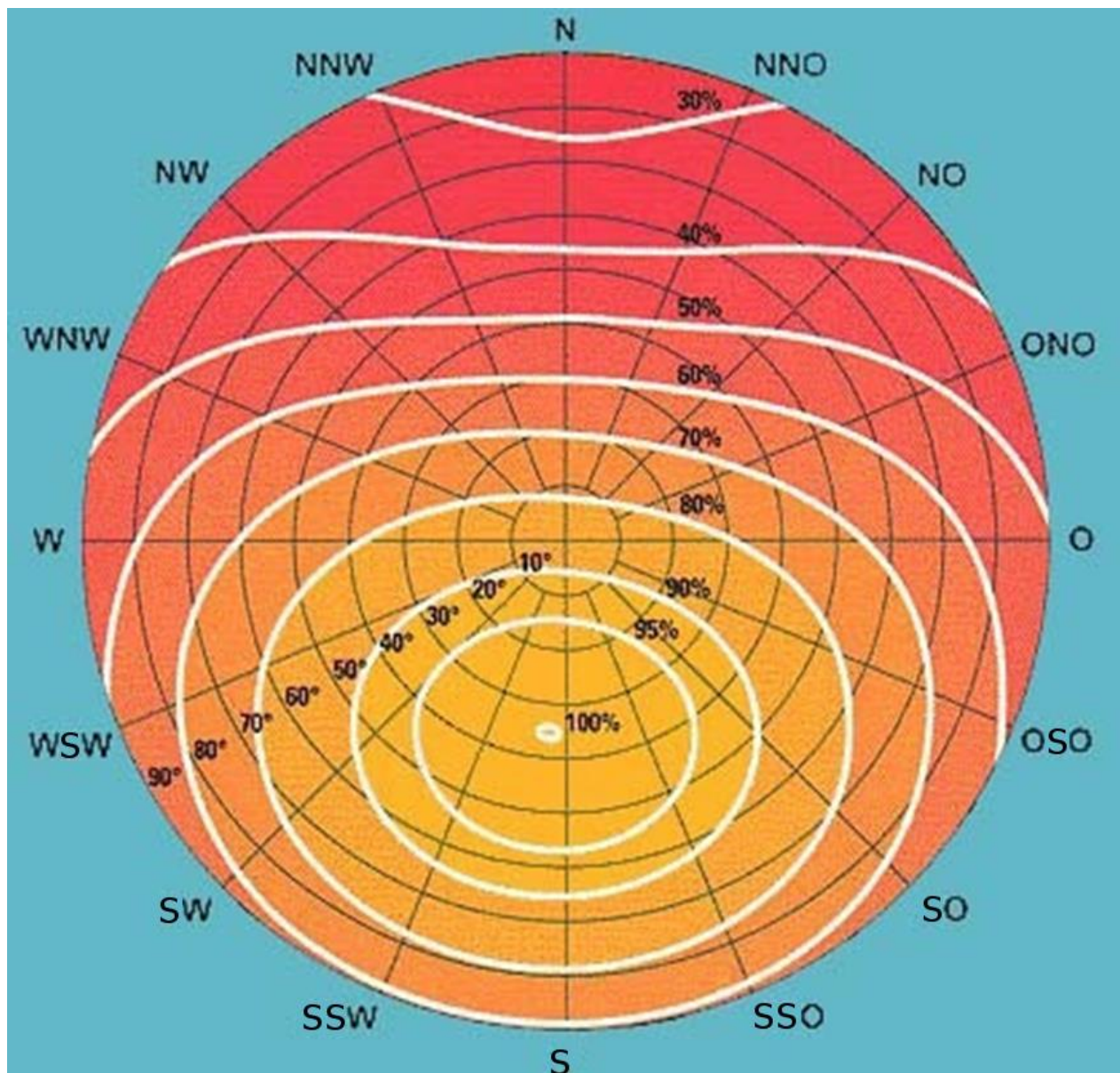
Man kann zwischen drei Windrädern wählen:

	Preis	max. Energieausbeute pro Jahr
Matthew	€ 14000	12000 kWh
Kathrina	€ 10000	8000 kWh
Sandy	€ 3500	1100 kWh

- Windräder haben eine Lebensdauer von 20 Jahren.
- Die Windstärke ist über das Jahr verteilt nicht konstant. Der Ertrag verteilt sich auf die Monate gemäß dem folgenden Diagramm:



Anlage C



Anlage D

