Polygone, Kaputzen und Dreiecke

Wiskunde B-Tag

23 November 2007

Der Wiskunde B-Tag wird unterstützt durch

Texas Instruments

Einleitung

Innen und Außen als Beispiel

Ihr spaziert aus dem Haus und kommt wieder zurück. Es darf keine Langeweile aufkommen und deshalb sorgt ihr dafür, dass ihr nicht zwei mal den selben Punkt passiert, Anfangs- und Endpunkt ausgeschlossen. Nichts besonderes? Schon deshalb, weil ihr die Welt in zwei Stücke eingeteilt habt: das Stück innerhalb eurer Wanderroute und das Stück außerhalb eurer Wanderroute. Geschlossene Kurven ohne Doppelpunkte (so heißen diese Sorte Figuren mathematisch) haben immer diese Eigenschaft. An diesem Wiskunde B-Tag geht es um spezielle geschlossene Kurven ohne Doppelpunkte: Kurven, bei denen die Route aus einer endlichen Anzahl gerader Linien besteht. Ihr kennt sie wohl: Dreiecke, Vier-, Fünf-, und Ganzvielecke. Die Bezeichnung für ein solches Objekt ist *einfaches Polygon.* Einfache Polygone können auch groß und kompliziert sein. So, wie es auf dem Deckblatt zu sehen ist: eine Linie ohne Ende und ohne Selbstschnitte, ein einfaches Polygon. Hierzu kann man nun ein Innen- und ein Außengebiet unterscheiden. Da liegt die Frage nahe, ob der Text **„Wiskunde B-dag 23 November 2007“** im Innengebiet liegt oder nicht.

Nehmt euch ein paar Minuten Zeit, um es herauszufinden.

Probieren...
Mit ein bischen Geduld und einem Bleistift kommt ihr schon dahinter. Ihr beginnt beim **W** und zieht eine Linie, die nie über die gedruckte Linie geht. So findet ihr schon heraus, ob die Frage mit ja oder nein zu beantworten ist. Nachteil: Es dauert lange und ist “dumme” Arbeit.

... oder argumentieren!
Ein cleveres Vorgehen verlangt ein wenig Nachdenken. Beginnt bei der **7** und tretet nun einmal doch über die schwarze Linie. Wart ihr drinnen, dann seid ihr nun draußen, und andersherum. Wenn ihr nach rechts geht, tretet ihr über 13 Linien und seid wirklich draußen. Dann wart ihr also bei der **7** im ....gebiet der Kurve.

Intention dieser Aufgabe des Wiskunde B-Tages
Ziel dieses Wiskunde B-Tages ist es, es nicht bei der Methode mit dem Bleistift zu belassen, sondern Strategien zu entwickeln: Einen klaren Plan, der auch zu anderen Kurven, womöglich viel größer und komplizierter, schnell die Antwort auf eine Frage gibt; auf andere Frage, als der nach dem Innen und Außengebiet! Die Frage nach dem Innen- und Außengebiet durch eine Betrachtung von geraden und ungeraden Anzahlen der Linienüberschreitungen hat beispielsweise eine schöne und direkt begreifbare Begründung. Das Problem ist gelöst und ihr wisst, wie ihr das bei anderen, noch komplizierteren Figuren auch machen könnt. Darum geht es.

Wie nun weiter?
Im weiteren Verlauf dieser Aufgabe werden euch noch allerlei andere Eigenschaften von einfachen Polygonen begegnen. Ihr untersuchst sie an Hand von Beispielen und kleineren *richtungsgebenden Fragen* (angegeben mit **R**). Das passiert in den Teilen A und B, die eine Basis für die wichtigen Fragen bilden, die in den folgenden Teilen behandelt werden. Ab Teil C findet ihr auch echte Forschungsfragen. Sie stehen in grauen Kästen. Das sind die Fragen, auf die es in eurer Untersuchung ankommt. Das sind auch Fragen, auf die ihr vielleicht nicht direkt eine Antwort wisst, und an denen ihr womöglich auch am Nachmittag des Wiskunde B-Tages weiterarbeiten könnt. Die richtungsgebenden Fragen bilden die Basis eurer Untersuchung. An Hand eurer Überlegungen zu den Forschungsfragen könnt ihr echt punkten, zeigen, dass ihr selbst Einfälle habt, das Ganze in ein neues Licht setzen könnt, usw.

Zu den Anwendungen:

Mathematiker reden nicht so häufig über die Anwendung ihrer Arbeit. Aber es ist nun einmal so: Das, was in diesem Wiskunde B-dag behandelt wird, wird auch angewendet - häufig und vielseitig! Und das geschieht auf vielen Gebieten, die mit Automatisierung, Robotern, Bewegung von Maschinen, Einteilen und Bewachen von Räumen, Wiedergabe von Fotos in Computerdateien, medizinischen Beschreibungen, usw. zu tun haben. Aber darauf kommt es hier nicht an... Wir befassen uns hiermit, um schöne Argumentationen zu finden, wie bei der **7** auf der ersten Seite.

Die Aufgabe

Global kann diese Aufgabe wie folgt eingeteilt werden:

- In den Teilen A und B werden vor allem solche Fragen zum Nachdenken präsentiert, die helfen sollen, weitere Fragen, die in den Teilen C bis F gestellt werden, zu bewältigen. Sorgt dafür, dass ihr als Team für die Teile A und B genügend Zeit habt, um danach eventuell die Arbeit der Teile C bis F im Team zu verteilen. Es ist ausdrücklich nicht gewollt, dass ihr in eurem Bericht alle einzelnen **R**-Fragen der Reihe nach beantwortet. Trefft in eigener Verantwortung eine Auswahl von Elementen der vorliegenden Fragen, die ihr in eurem Abschlussbericht aufnehmt!
- Die Teile C und F hängen miteinander zusammen (durch die Forschungsfragen 1 und 4). **Die Bearbeitung dieser beiden Forschungsfragen bildet den Kern eures Berichts!** Diese Gegenstände gar nicht oder nicht mit genügend Tiefgang zu bearbeiten, kommt deshalb überhaupt nicht in Frage.
- Die Teile D und E führen zu interessanten Nebenüberlegungen. Ihre Resultate (Forschungsfragen 2a, 2b und 3) tragen nicht zum Verständnis des Zusammenhangs zwischen den Teilen C und F bei. Aber dort stehen hübsche, herausfordernde Problemstellungen, die eine Untersuchung bestimmt wert sind! Wenn ihr mit eurem Bericht bis dahin kommt, dann könnt ihr damit sicher punkten, um als bestes Team aus dem Wettbewerb hervorzugehen.

Lasst in eurem Bericht erkennen, dass ihr ein Verständnis in den Grundlagen der einfachen Polygone gewonnen habt. Das erreicht ihr, indem ihr eine gute Auswahl der Aufgaben genau ausarbeitet und an Hand von Zeichnungen eure Überlegungen noch weiter verdeutlicht. Zeigt durch Anwendung des Basismaterials und mit eigenen Ideen, dass ihr mit den Forschungsaufgaben 1 und 4 weit kommt, wobei ihr Gedankengänge und Strategien entdecken und gut verständlich in Worte fassen müsst. Ergänzungen, in denen ihr über Entdeckungen bei den Forschungsfragen 2a, 2b und 3 berichtet, sind sicherlich von Vorteil!

Das reicht ihr ein:
Eure Ausarbeitungen fasst ihr in einem zusammenhängenden Bericht zusammen. Dieser Bericht muss lesbar und gut verständlich für jeden Mitschüler sein, auch für diejenigen, die noch nie etwas von einfachen Plygonen gehört haben.

Weitere Tipps
- Bei dieser Aufgabe müsst ihr viel ausprobieren und zeichnen. Häufig werden eure Zeichnungen beinahe gut sein, aber ihr wollt noch etwas verändern. Benutzt also viel Papier, Bleistift und Radiergummi.
- Achtet darauf, dass die Arbeit gut kopierbar ist, benutzt also schwarzes Schreib- und Zeichenmaterial.
- Denkt auch an die zur Verfügung stehende Zeit an diesem Tag! Die Zusammenstellung der Ergebnisse in einem Bericht kostet Zeit. Beginnt daher rechtzeitig mit eurem Bericht.

- Verteilt die Arbeit immer untereinander, wenn ihr euch über die Herangehensweise einig seid.

Schlussendlich

Weil es häufig auf ganz genaue Formulierungen ankommt, werden in der Aufgabe an verschiedenen Stellen Erläuterungen und Definitionen gegeben. Die wichtigsten Definitionen und Erläuterungen sind auf einem gesonderten Papier “Definitionen und Bezeichnungen” zusammengestellt, das ihr mit der Aufgabenstellungen erhalten habt. Es sind außerdem zwei Arbeitsblätter beigefügt (zu den Fragen **R25** und **R31**) auf denen ihr eine geforderte Konstruktion ausführen könnt.

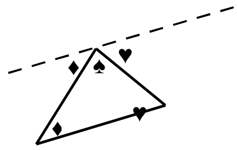
Viel Erfolg und viel Spaß beim Wiskunde B-dag!

Teil A Eckpunkte und Winkel von Polygonen

Wir gehen davon aus, dass ihr wisst, dass die drei Innenwinkel eines Dreiecks zusammen 180° ergeben. Anders gesagt:

In jedem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel 180°.

Das dürft ihr immer für eure Argumentation benutzen. Den bekannten Beweis seht ihr in der nebenstehenden Skizze angedeutet:

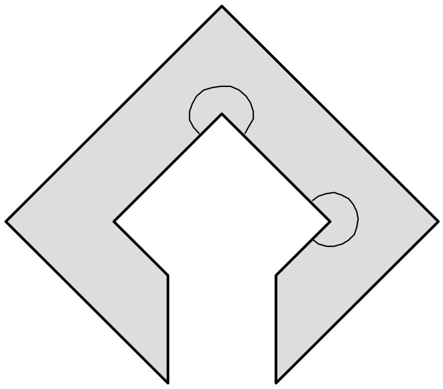


R1

a. Zeichnet ein Viereck und bestimmt die Summe der Innenwinkel. Gilt dies für alle Vierecke, also auch, wenn dort eine eingestülpte Ecke vorliegt?

b. Könnt ihr die Summe der Innenwinkel eines Vielecks mit n Ecken ohne eingestülpte Ecken durch eine Formel ausdrücken? (In der Formel muss die Winkelsumme durch einen Ausdruck in der Eckenzahl *n* des Polygon dargestellt werden).

Beim hier skizzierten 10-Eck (zählt kurz nach!) mit einem “eingestülpten” Teil, sowie in den folgenden Figuren, müsst ihr wissen um welche Winkel es geht. Es sind die Winkel im **Innengebiet** des Vielecks, also innerhalb des grauen Stücks. Dort sind zwei Winkel mit 270° markiert.



c. Kontrolliere, ob die Winkelsumme wieder der Formel in **R1b** genügt.

Wahrscheinlich hast du bei **R1a** und **R1b** mit einer Aufteilung der Figur in Dreiecke gearbeitet. Das kann man hier vielleicht auch tun.

d. Unterteile das 10-Eck in Dreiecke. Die Eckpunkte des Dreiecks sind dabei auch Eckpunkte des 10-Ecks.

Definitionen

In dieser Aufgabe des Wiskunde B-Tages geht es um einige Besonderheiten von Vielecken. Genauer Sprachgebrauch ist dabei wichtig. Darum geben wir Definitionen zu den wichtigsten Begriffen. Weiter unten folgen bereits einige davon. Alle wichtigen Definitionen sind auf einem eigenen Papier noch einmal aufgelistet. Wir halten uns an die üblichen mathematischen Bezeichnungen. Daher sprechen wir ab jetzt immer von Polygonen an Stelle von Vielecken. An der Bearbeitung mancher Fragen wird die genaue Bedeutung von Definitionen klar: Passt hierbei gut auf!

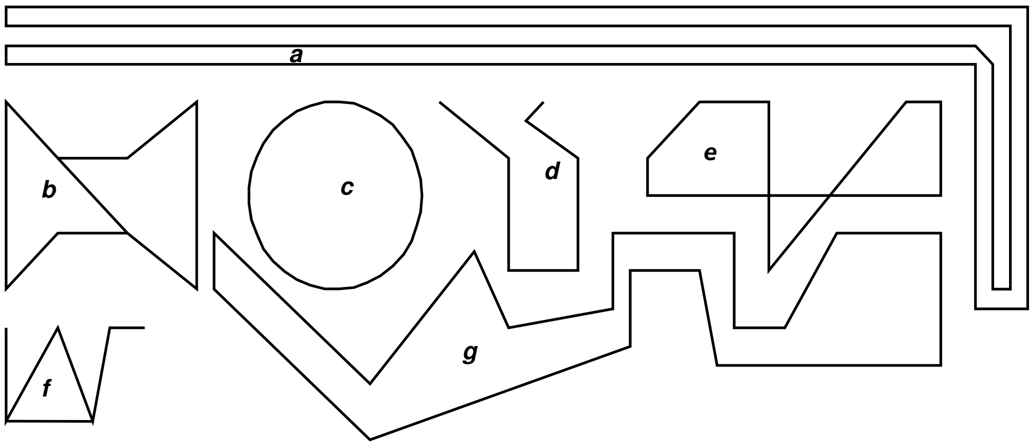
Polygon mit n Eckpunkten (n > 2)

Ein Polygon ist ein geschlossener Streckenzug, der aus n (also einer endlichen Anzahl) Streckenabschnitten besteht.
Es gibt n verschiedene Punkte $p_1, p_2, \ldots, p_n$, welche die Ecken des Polygons bilden.
Das Polygon hat die n verschiedenen Seiten $z_1 = p_1p_2$, $z_2 = p_2p_3$, …. , $z_{n-1} = p_{n-1}p_n$ und $z_n = p_np_1$.

Beachtet:

- Ecken werden meistens mit Großbuchstaben bezeichnet. In dieser Aufgabe benutzen wir Großbuchstaben, um ein Polygon anzugeben. Die kleinen Buchstaben (häufig mit Indizes) werden für das Benennen von Ecken und Seiten verwendet.

- p_np_1 ist diejenige Seite des Polygons, die den letzten Punkt p_n mit dem Anfangspunkt p_1 verbindet, wodurch das Polygon geschlossen wird.



- Ein Polygon hat genauso viele Ecken wie Seiten.

R2. Welche der folgenden Figuren sind Polygone?

Ein Polygon kann sich selbst schneiden. Das geschieht in einem der Beispiele. Für unsere Untersuchung schließen wir das aus. Darum legen wir die folgende Bezeichnung fest:

Einfaches Polygon

Ein einfaches Polygon hat keine Selbstschneidungen.

R3. Welche Figuren hier oben sind einfache Polygone?

Wenn in dieser Aufgabe “Polygon” steht, dann ist damit ab jetzt “einfaches Polygon” gemeint.

Folgendes kennt ihr bereits:

Innen- und Aussengebiet

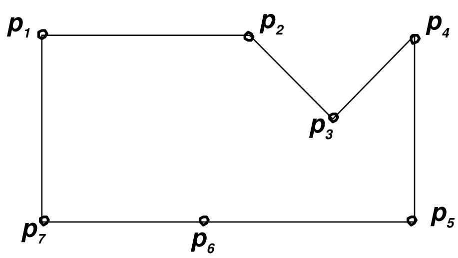
Ein einfaches Polygon teilt die Ebene in zwei aneinanderliegende Teile: das Innen- und das Aussengebiet. Kennzeichen des Aussengebiets: es ist unbeschränkt groß. Das Polygon selbst gehört per Definition NICHT zum Innen- oder Aussengebiet.

Nähere Betrachtung von Winkeln

In der Frage **R1** habt ihr folgendes schon gesehen:

Winkel eines einfachen Polygons

Die Größe eines Winkels in einem einfachen Polygon wird durch den Winkel im Innengebiet angegeben.



In der nebenstehenden Skizze seht ihr ein Polygon mit 7 Ecken. Gestreckte Winkel, wie bei Eckpunkt p_6, sind auch erlaubt! Achtet auf die Einteilung der Winkel:

herausstehende Ecken

Ein Eckpunkt heißt herausstehend, wenn der zugehörige Winkel zwischen 0° und 180° liegt.

eingestülpte Ecken

Ein Eckpunkt heißt eingestülpt, wenn der zugehörige Winkel zwischen 180° und 360° liegt.

Gestreckte Ecken

Ein Eckpunkt heißt gestreckt, wenn der zugehörige Winkel 180° beträgt.

Beachtet:

1. Winkel von 0° und von 360° sind demnach bei einfachen Polygonen nicht möglich!
2. Winkel und Ecken sind zwei verschiedene Begriffe. Die Ecke ist ein Punkt des Polygons, an dem zwei Seiten zusammen kommen. Die zwei Seiten bilden einen Winkel im Innengebiet des Polygons mit einer Größe, die zwischen 0° und 360° liegt.

R4. Ihr habt Polygone mit, aber auch ohne eingestülpte Ecken gesehen. Hier gibt es etwas zu untersuchen! Geht an die folgenden Zeichenaufgabe mit Kreativität heran. Wenn ihr sicher seid, dass die Aufgabe nicht lösbar ist, dann müsst ihr darlegen, warum.

- **a.** Zeichnet ein Polygon mit 4 herausstehenden und 4 eingestülpten Ecken und zwar so, dass sich die herausstehenden und die eingestülpten Ecken abwechseln.
- **b.** Zeichet ein Polygon mit 4 herausstehenden und 4 eingestülpten Ecken und zwar so, dass zuerst alle herausstehenden Ecken und danach alle eingestülpten Ecken aufeinander folgen.
- **c.** Zeichnet ein Polygon mit 3 herausstehenden und 2 eingestülpten Ecken.
- **d.** Zeichnet ein Polygon mit 2 herausstehenden und 3 eingestülpten Ecken.
- **e.** Zeichnet ein Polygon mit 3 herausstehenden und 20 eingestülpten Ecken.
- **f.** Zeichne ein Polygon mit 12 gestreckten Ecken und drei Ecken von 60°.

Stellt euch vor, dass...
Beim letzten Beispiel (**R4d**) habt ihr bestimmt gemerkt, dass es nicht klappt. Ein guter Augenblick, um eine Argumentation aufzustellen, die die folgende Behauptung untermauert:

Jedes einfache Polygon hat mindestens drei herausstehende Ecken.

Bei so einer Behauptung könnt ihr nicht einfach sagen: das ist logisch, denn mit weniger als drei könnt ihr nicht zeichnen. Denn vielleicht kann jemand anders ein kompliziertes oder selbst ein einfaches Beispiel hierzu zeichnen.
Ihr müsst eine Argumentation finden, dass es wirklich *nie* geht. Das kann zum Beispiel folgendermaßen beginnen:

Stellt euch vor, es gibt ein Polygon mit n Ecken, von denen nur 2 Ecken herausstehend sind. Das gilt für den ein oder anderen Wert von n, aber ihr wisst nicht, für welche Werte.

Nun werden wir daraus Folgerungen ableiten. Kommt es dabei zu Widersprüchen, dann folgt daraus, dass die Annahme bei “Stellt euch vor” nicht stimmen kann!
Erste Folgerung aus der Stellt-euch-vor Behauptung:

Es gibt n-2 Ecken, die eingestülpt oder gestreckt sind. Sie ergeben zusammmen mindestens $(n-2)\cdot 180$ *Grad.*

R5. **a.** Erklärt, warum die letzte Aussage richtig ist.
b. Was folgt nun aus der bekannten Formel für die Winkelsumme?

c. Nun läuft es nicht mehr glatt..... Schließt die Argumentation selbst ab.

In eurer weiteren Argumentation dürft ihr ab jetzt also den Satz über herausstehende Ecken benutzen:

Satz von den herausstehenden Ecken
Jedes einfache Polygon hat mindestens 3 herausstehende Ecken.

Aber merkwürdig: Ein einfaches Polygon ohne eingestülpten Ecken gibt es schon, ein einfaches Polygon ohne herausstehende Ecke dagegen nicht.
Anders gesagt: Es gibt stets eine herausstehende Ecke bei einem einfachen Polygon!
Dieses einfache Ergebnis benötigt ihr in Teil C.

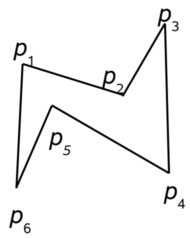
Teil B Diagonalen und Kaputzen

In einem einfachen Polygon mit n Ecken $p_1, p_2, \ldots, p_n$ **kann jede Ecke mit jeder der** $n - 1$ **anderen Ecken durch eine Strecke verbunden werden. Die zwei Verbindungslinien einer Ecke mit ihren** Nachbarpunkten **sind** Seiten **des Polygons. Eine Verbindungslinie, die von den Ecken abgesehen ganz im Innengebiet vom Polygon liegt, nennen wir eine** Diagonale**. Für alle anderen Verbindungslinien gilt, dass sie (bis auf die Ecke) ganz außerhalb des Polygons liegen, oder dass sie teilweise innerhalb und teilweise außerhalb des Polygons liegen.**

R6. Wir untersuchen einfache Polygone für $n = 4$, $n = 5$ und $n = 6$.
Bei jeder dieser Fragen könnt ihr Vermutungen aufstellen und sie überprüfen, indem ihr einfache Beispiele zeichnet und hieran argumentiert.

- **a.** Wie viele Verbindungslinien hat ein einfaches Polygon (abgesehen von den Seiten) insgesamt?
- **b.** Ist es möglich ein einfaches Polygon mit genau einer Diagonalen zu zeichnen? Falls das nicht möglich ist, wie viele Diagonalen hat ein Polygon dann mindestens? Und wie viele Diagonalen sind maximal möglich?
- **c.** Könnt ihr jedes beliebige, einfache Polygon mit Hilfe von Diagonalen in nicht-überlappende Dreiecke aufteilen? Wie viele Diagonalen sind dafür nötig?

Jede Ecke p_i eines Polygons hat zwei Nachbarpunkte p_{i-1} und p_{i+1}.
Wenn die Verbindungslinie, durch welche die beiden Nachbarpunkte verbunden sind, eine Diagonale ist, dann nennen wir Ecke p_i eine **Kaputze**.
Jede Kaputze ist also eine herausstehende Ecke, aber die Umkehrung ist nicht immer wahr! Das Polygon, das hier zur Verdeutlichung gezeichnet ist, hat vier herausstehende Ecken (p_1, p_3, p_4 und p_6), von denen zweie auch Kaputzen sind (p_3 und p_6).

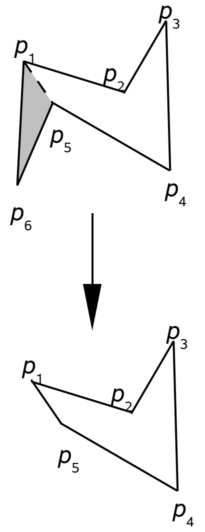


R7. Betrachtet weitere einfache Polygone mit n = 6, als das in der Skizze.

- **a.** Konstruiert ein Sechseck mit genau zwei Kaputzen. Wie viele herausstehende Ecken gibt es dann? Gibt es mehrere Möglichkeiten?
- **b.** Konstruiert ein Sechseck mit genauso vielen Kaputzen wie herausstehenden Ecken. Gibt es mehrere Möglichkeiten?

Eine Kaputze kann aus einem einfachen Polygon mit n Ecken immer entfernt werden, ohne dass dies das Aussehen des Polygons wesentlich verändert. Ihr schneidet, im wahrsten Sinne des Wortes, das Dreieck, geformt durch die Kaputze und seine beiden Nachbarpunkte, ab, wodurch die Diagonale, die die zwei Nachbarpunkte verbunden hat, eine Seite des neuen Polygons wird.
Das neue Polygon hat eine Ecke und eine Seite weniger. In der nebenstehenden Skizze ist dieser Vorgang dargestellt.

Diese Prozedur des Abschneidens ist bei Ecken, die keine Kaputzen sind, nicht möglich!
In der folgenden Aufgabe geht es um eine eigene, kleine Untersuchung über Kaputzen.



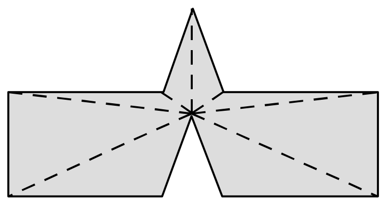
R8. In dem in der Skizze dargestellten Vorgang vom Abschneiden einer Kaputze (Dreieck $p_1 p_5 p_6$) ensteht direkt eine neue Kaputze bei p_1 und auch bei p_5.

a. Weist nach, dass das Entfernen einer Kaputze (p_1, p_3 *oder* p_5) aus dem neu entstandenen Polygon im verbleibenden Polygon wieder zu einer Kaputze führt.

b. Folgt dies aus den speziellen Bedingungen im Beispiel oder gilt es allgemein? Kurzum: Untersucht, ob das Entfernen einer Kaputze aus einem einfachen Polygon immer zu einer neuen Kaputze im daraus entstandenen Polygon führt.

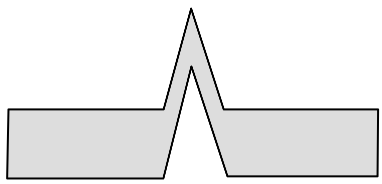
Teil C Triangulierungen von Polygonen

Bei der Bestimmung der Winkelsumme eines Polygons mit n Seiten (in Frage **R1**) haben wir von der Tatsache Gebrauch gemacht, dass das betrachtete Polygon in $n-2$ Dreiecke aufgeteilt werden konnte, wobei keine neue Ecke nötig war. Wir sind jedoch nicht der Frage nachgegangen, ob diese Voraussetzung allgemein gilt, und das ist wirklich ein Schwachpunkt in der Argumentation!



R9. In dieser Figur ist im oberen Beispiel (*n=10*; *8* Dreiecke) eine mögliche Einteilung bereits angegeben.

a. Auch die untere Figur (ebenfalls *n=10*) kann in *8* Dreiecke eingeteilt werden, aber nicht auf die gleiche Weise, wie bei der oberen! Zeichnet hierzu dennoch eine Einteilung in 8 Dreiecke, wieder ohne eine zusätzliche Ecke hinzuzufügen.



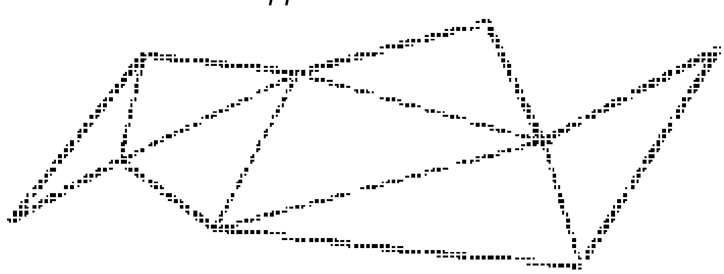
In diesen Beispielen könnt ihr auch ohne eine Einteilung in Dreiecke zeigen, dass die Winkelsumme 8 x 180° ist, da der Punkt oben schön in die Einbuchtung darunter passt.

b. Gebt eine Argumentation an, die nun niet- und nagelfest beweist, dass man diese Polygone *nicht* in 7 Dreiecke unterteilen kann.

Nach diesen Vorbereitungen ist die folgende Definition gut verständlich:

Triangulierung eines einfachen Polygons

*Eine **Triangulierung** eines Polygons P ist eine vollständige Überdeckung von P und dem Innengebiet von P mit Dreiecken, deren Eckpunkte stets Ecken von P sind, wobei die Dreiecke einander nicht überlappen.*



Es ist nun noch eine offene Frage, ob zu jedem Polygon solch eine Triangulierung existiert, und ob, falls dies so ist, immer genau n – 2 Dreiecke nötig sind.
Dieser Teil der Aufgabe soll nun in dem zu beweisenden Satz münden:

(noch zu beweisender) Satz über Triangulierungen
Zu jedem einfachen Polygon mit n Ecken gibt es eine Triangulierung mit n – 2 Dreiecken.

Als Vorbereitung darauf werden wir zunächst besondere Fälle betrachten: konvexe und beinahe-konvexe Polygone.

Konvexe Polygone

Der Begriff Konvexes Polygon spielt in einer ganzen Reihe von Überlegungnen an diesem Tag eine bedeutende Rolle. Üblicherweise wird ein konvexes, einfaches Polygon beschrieben als ein Polygon ohne eingestülpte Ecken. Damit sind auch gestreckte Ecken zugelassen. In der Aufgabe dieses Wiskunde B-Tages geben wir einer eher strengen Definition den Vorzug:

Konvexe Polygone

Ein einfaches Polygon mit ausschließlich herausstehenden Ecken heißt konvexes Polygon.

Die angenehme Eigenschaft eines konvexen Polygons ist, dass man von jeder Ecke ausgehend Diagonalen zu allen anderen Ecken ziehen kann (außer zu den zwei Nachbarpunkten, denn dadurch erhält man ja Polygonseiten).

R10. Formuliert in einem “*Rezept*”, wie ein konvexes Polygon trianguliert werden kann. Das Rezept kann so beginnen:

1. Gegeben sei ein konvexes Polygon mit n Ecken.
2. Wähle eine der Ecken aus.
3. Ziehe...
4. ....

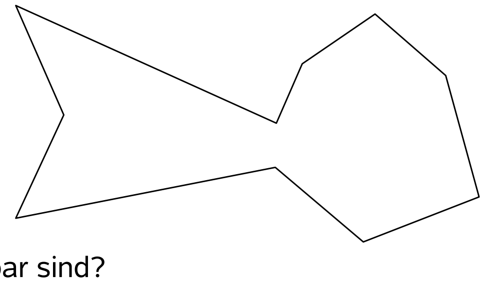
a. Vervollständigt das Rezept.
b. Gebt einige Beispiele an.

Beinahe-konvexe Polygone

*Ein **beinahe-konvexes** Polygon ist ein Polygon, in dem alle bis auf eine Verbindungsstrecke zwischen nicht benachbarten Eckpunkten vollständig innerhalb des Polygons liegen.*

R11. *Auch für beinahe-konvexe Polygone sollt ihr ein Triangulierungs-Rezept formulieren.*
a. Zeigt, dass ihr einen der Schritte im Rezept für konvexe Polygone anpassen müsst und könnt.
b. Beschreibt einige einleuchtende Beispiele von beinahe-konvexen Polygonen und deren Triangulierung.

Zerteilen und Kleben!



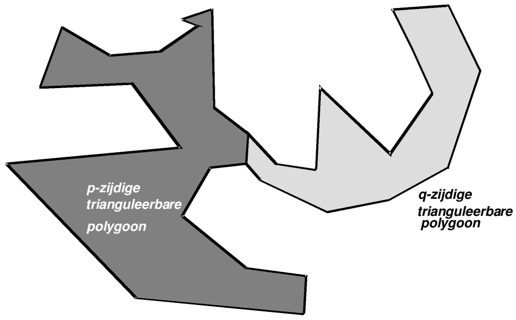
Beim nebenstehend skizzierten Polygon ist es auch nicht schwierig, eine Triangulierung anzugeben. Das Polygon kann nämlich in einen konvexen und einen beinahe-konvexen Teil zerteilt werden.

R12. a. Beschreibt die entsprechenden Teile der Figur.
b. Wie schließt ihr aus den vorangegangenen Überlegungen, dass beide Teile einzeln triangulierbar sind?

Die hier angedeutete Idee ist ein Beispiel für das **Prinzip "teile und herrsche":** Könnt ihr ein Problem nicht direkt lösen, dann teilt es in zwei Teile und löst die Teilprobleme einzeln auf.

R13. Trotzdem gibt es noch einiges, dass ihr herausfinden müsst! Das Polygon hat 10 Seiten. Beim Zerteilen bekommt ihr zwei Polygone, jedes mit weniger als 10 Seiten. Jedes der beiden Teil-polygone benötigt eine bestimmte Anzahl von Dreiecken für die Triangulierung. Stimmt die Anzahl der Dreiecke, die ihr für das 10-seitige Polygon benötigt, dann auch noch mit der Aussage im Satz über Triangulierungen überein?

R14. Gegeben sei ein Polygon mit n Seiten, das entlang einer Diagonalen in zwei Teilpolygone zerteilt werden kann. Das eine Teilpolygon hat p Seiten, das andere q. Nimm an, dass beide Teile den Triangulierungssatz erfüllen.



a. Drücke die Anzahl der Dreiecke, die für die Triangulierung vom Teilpolygon benötigt werden, in p und q aus.

b. Zeige, dass für das wieder zusammengefügte Polygon nun eine Triangulierung gefunden ist, welche die Bedingung des Satzes über Triangulierungen erfüllt.

Zerteilen geht immer!

Um das Prinzip "teile und herrsche" anwenden zu können, müsst ihr mindestens eine Diagonale in eurem Polygon finden. Es ist jedoch nicht so, dass die Diagonalen in einem Polygon immer zum Greifen herumliegen. In Teil B habt ihr bereits ein wenig mit Diagonalen geübt. Ein einfaches Polygon ohne Diagonalen gibt es nicht. Aber es ist ein Beweis nötig für den

Diagonal- Satz

Jedes einfache Polygon hat mindestens eine Diagonale.

Die folgenden Anmerkungen liefern Ideen für einen Beweis:

- Stellt euch vor, dass das Polygon eine Kaputze hat. Dann seid ihr bereits fertig mit dem Beweis! (Warum? Wo ist die Diagonale dann?)
- Aber eigentlich haben wir (noch) keinen Beweis, dass jedes einfache Polygon eine Kaputze hat...
- Wir wissen inzwischen wohl (siehe Teil A), dass jedes einfache Polygon eine herausstehende Ecke hat.
- Bei einer herausstehenden Ecke h, die keine Kaputze ist, kommen andere Teile des Polygons in die Nähe von h, Teile, die dafür sorgen, dass h keine Kaputze sein kann...

R15. Zeigt: Wenn h eine herausstehende Ecke ist, aber keine Kaputze, dann geht eine Diagonale von h aus.

R16. Formuliert nun selber einen Beweis für den Diagonal-Satz.

Forschungsauftrag 1

Mit Hilfe der vorangegangenen Überlegungen könnt ihr nun einen vollständigen Beweis für den oben bereits formulierten Triangulierungssatz liefern:

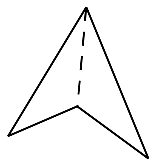
Satz über die Triangulierung einfacher Polygone

Zu jedem einfachen Polygon mit n Eckpunkten gibt es eine Triangulierung aus n-2 Dreiecken.

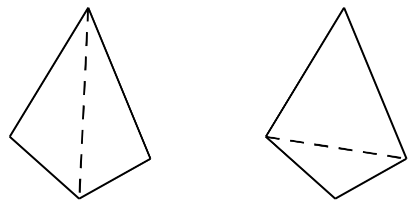
Im Beweis muss also insbesondere gezeigt werden, dass für einfache Polygone eine Triangulierung mit genau der richtigen Anzahl von Dreiecken existiert. Ihr dürft im Beweis die erarbeiteten Inhalte aus den Aufträgen A bis C verwenden.

Teil D Triangulierungen zählen

Abhängig von seiner Form, kann ein Vieleck eine oder mehr Triangulierungen haben:



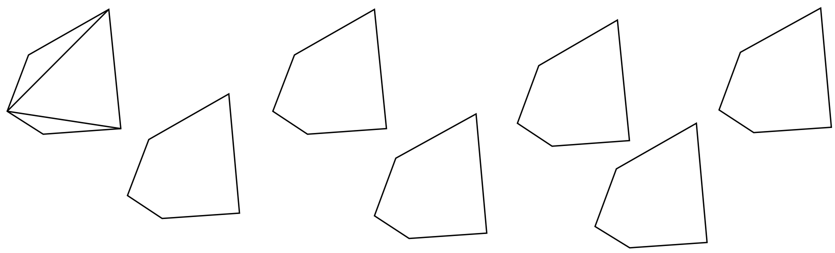
niet convex: 1 triangulatie



convex: 2 triangulaties

Bei Polygonen mit mehr als vier Ecken gibt es noch mehr Möglichkeiten!

R17. Die folgende Skizze zeigt ein konvexen Fünfecks, das mehrfach gezeichnet wurde. Zeichnet möglichst viele verschiedene Triangulierungen; eine ist bereits gegeben.



Bei konvexen Polygonen stehen für eine Triangulierung besonders viele Diagonalen zur Verfügung. Diesen Fall untersuchen wir weiter.

Konvexe Polygone: die Anzahl der Triangulierungen zählen.
Bei konvexen Polygonen hängt die Anzahl der möglichen Triangulierungen allein von der Anzahl der Ecken n ab. Für $n=3$ gibt es natürlich nur eine Möglichkeit; das Polygon ist selbst ein Dreieck. Auch für $n=4$ gibt es kein Problem: 2 Triangulierungen. Jede der beiden Diagonalen bestimmt eine.
Für $n=5$ habt ihr wahrscheinlich 5 Triangulierungen gefunden.

R18. Formuliert auch für $n = 5$ eine einfache Argumentation, dass es nicht mehr Triangulierungen sein können.

Die Anzahl der Triangulierungen bei gegebenen n nennen wir künftig T_n.

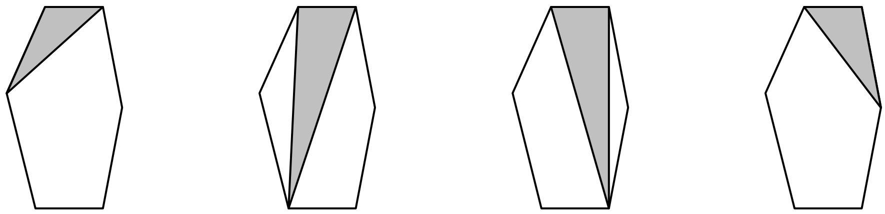
Systematisch arbeiten

Für größere Werte von n ist es vernünftig nach einem System vorzugehen, mit dem ihr sicher stellt, dass ihr keine Möglichkeiten vergesst und auch keine mehrfach zählt.

R19. Probier auf eine systematische Weise die Anzahl der möglichen Triangulierungen für n = 6 zu finden.

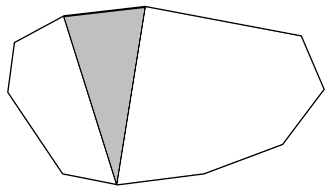
Für solch eine systematische Herangehensweise stellen wir nun ein Beispiel vor.
Möglicherweise habt ihr bereits eine andere (bessere?) systematische Herangehensweise.

Es sind 14 verschiedene Triangulierungen eines konvexen Sechsecks möglich. Das habt ihr gerade herausgefunden. Habt ihr nicht alle 14 Möglichkeiten gefunden oder habt ihr womöglich zu viele Möglichkeiten gezählt, dann bekommt ihr nun eine neue Chance! Die 14 Möglichkeiten könnt ihr nämlich auf unterschiedliche Art und Weise gruppieren (oder klassifizieren). Die folgende Klassifikation macht Gebrauch von so etwas, wie dem Prinzip “teile und herrsche”. Hier wird von einer fest ausgewählten Seite des Polygons aus gearbeitet. In dem unten stehendem Schema ist die oberste Seite als feste Seite gewählt und dabei sind die passenden vier möglichen Dreiecke grau gezeichnet.



R20. Teilt und herrscht: Schaut nach, welche Möglichkeiten es noch in jedem der weißen Vielecke für Triangulierungen gibt. Die weißen Vielecke haben selbstverständlich eine geringere Seitenzahl als 6.

R21. Erläutert, dass ihr mit dieser Art und Weise, die Einteilung vorzunehmen, sicher wisst,
- **a.** dass ihr alle Triangulierungen des konvexen Sechsecks erhaltet und
- **b.** dass euch keine Mehrfachzählungen unterlaufen.



R22. Als Vorübung für die Argumentation an größeren Vielecken behandeln wir nun folgenden Zwischenschritt zum nebenstehend skizzierten konvexen 10-Eck: Wie viele Triangulierungen von diesem 10- Eck gibt es, in denen das graue Dreieck vorkommt?

In der folgenden Tabelle stehen die bereits bekannten Zahlen für T_n

n	3	4	5	6	7	8	9
T_n	1	2	5	14			

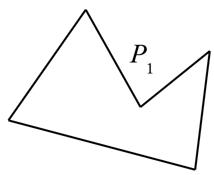
R23. Ergänzt die Tabelle um $n = 7, n = 8, n = 9$.

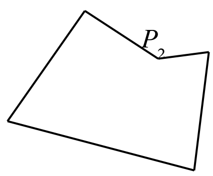
Forschungsauftrag 2a
Formuliert die Vorgehensweise nun in Form eines Rezepts. Wenn möglich, übertragt das Rezept als Programm für einen Computer oder einen CAS-Rechner. Damit kommt ihr sicherlich noch viel weiter. Wenn ihr die Möglichkeit habt, so stellt euch der Herausforderung, T_{17} und T_n für größere Werte von n zu berechnen.

Beinahe-konvexe Polygone: die Anzahl der Triangulierungen zählen

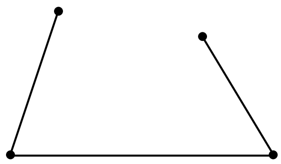
Im gewissen Sinne sind konvexe Polygone besser kalkulierbar als nicht-konvexe. Das liegt unter anderem daran, dass nicht-konvexe Polygone mehr verschiedenartige Erscheinungsformen haben.

R24. Betrachtet die beiden nebenstehenden nicht-konvexen Fünfecke P_1 und P_2.
- **a.** Wie viele unterschiedliche Triangulierungen hat P_1 ?
- **b.** Wie viele unterschiedliche Triangulierungen hat P_2 ?





R25. Vier der fünf Ecken eines Fünfecks sind hier in der nebenstehenden Skizze gegeben (dieselbe Figur steht auch auf dem **Arbeitsblatt R25**). Die Position des fünften Eckpunkts kann noch frei gewählt werden. Natürlich wohl so, dass ein einfaches Polygon (also keine Selbstschneidungen!) entsteht.



Abhängig von der Wahl der Position von dieser fünften Ecke können mit dem kompletten Fünfeck verschiedene Anzahlen von Triangulierungen vorgenommen werden.

a. Wählt zuerst aus, in welcher Teilfläche die fünfte Ecke liegen kann. Es dürfen keine Durchschneidungen mit den bereits gezeichneten Seiten entstehen!

Für einige Punkte im erlaubten Gebiet hat das entstehende Fünfeck, nach dem Hinzufügen der fünften Ecke, fünf Triangulierungen, für andere drei, usw.

b. Unterteilt das erlaubte Gebiet für die Platzierung der fünften Ecke auf der Basis der Anzahl verschiedener Triangulierungen, die möglich sind, in unterschiedliche Gebiete. Beschreibt die verschiedenen Gebiete klar und eindeutig.

Beinahe-konvexe Polygone

Nicht-konvexe Polygone kann man nicht so gut in den Griff bekommen, wie konvexe Polygone. Das habt ihr schon bemerkt. Darum betrachten wir jetzt nur noch die schon früher genannten beinahe-konvexen Polygone. Erinnert euch an die Definition:

*Ein **beinahe-konvexes** Polygon ist ein Polygon, in dem alle bis auf eine Verbindungsstrecke zwischen nicht benachbarten Eckpunkten vollständig innerhalb des Polygons liegen.*

Anschaulich gesagt ist ein beinahe-konvexes Polygon also ein konvexes Polygon, dessen eine Ecke nach innen gestülpt ist. Dabei wird nur die Verbindungslinie zwischen den zwei Nachbarpunkten überschritten. Polygon P_2 (siehe oben bei **R24**) ist beinahe-konvex, P_1 dagegen nicht.

R26. Bestimmt die Anzahl der verschiedenen Triangulierungen für beinahe-konvexe Polygone mit $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$ und $n = 7$. Vergesst nicht die Systematik!

Auch hier bekommt ihr die Gelegenheit eure gefundenen Antworten zu korrigieren, (falls nötig!). Es hat sich herausgestellt, dass ein Zusammenhang zwischen den Zahlen T_n, die ihr bei dem konvexen Fall gefunden habt, und den Anzahlen in den beinahe-konvexen Fällen besteht!

Die Anzahl der verschiedenen Triangulierungen eines beinahe-konvexen Polygons nennen wir $\boldsymbol{B_n}$.

Die B- Zahlen haben sich als Differenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden T- Zahlen herausgestellt. Genauer:

$\mathbf{B_n = T_n - T_{n-1}}$ *für* $n > 3$

Benutzt diesen Zusammenhang, um die gefundenen Anzahlen zu kontrollieren oder zu korrigieren. Es ist natürlich schön, wenn man so einen Zusammenhang in den Schoß gelegt bekommt, aber mathematisch eingestellte Personen wie ihr begnügen sich damit nicht! Natürlich möchtet ihr wissen, warum der Zusammenhang gültig ist. Und ihr möchtest das auch nicht Eingeweihten überzeugend erklären! Kurzum:

R27. Zeigt, dass der genannte Zusammenhang zwischen diesen drei Anzahlen gilt.

Vielleicht ist eure Neugier nun gerade richtig geweckt worden.

Wie verhält es sich mit einem Polygon, das bis auf zwei kleine Beulen konvex ist? Kann für diesen Fall auch ein so schöner Zusammenhang zwischen der Zahl der möglichen Triangulierungen und den *T*- und B -Zahlen gefunden werden?

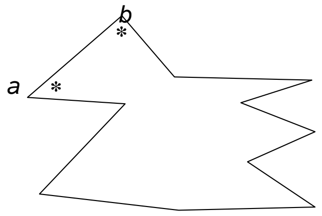
Forschungsauftrag 2b
Untersucht den Fall, dass zwei Verbindungsstrecken nicht benachbarter Punkte vollständig außerhalb des Polygons verlaufen und alle anderen Verbindungsstrecken zwischen zwei nicht benachbarten Punkten im Innengebiet des Polygons liegen. Sucht nach einem als Formel formulierten Zusammenhang für den allgemeinen Fall.

Teil E Der Satz von den zwei Kaputzen

Ihr wisst, dass ihr ein Polygon mit ganz vielen Seiten zeichnen könnt, das nur drei herausstehende Ecken hat. Eine ähnliche Frage könnt ihr zu Kaputzen stellen.

Bei Kaputzen unterscheiden wir *verbundene* Kaputzen und getrennte Kaputzen. In den folgenden Beispielen seht ihr den Unterschied.

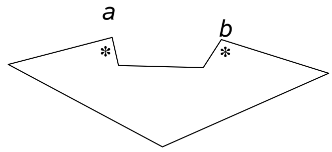
Verbundene Kaputzen



Zwei Kaputzen a und b auf einem einfachen Polygon heissen verbunden, wenn ab eine Seite des Polygons ist.

Getrennte Kaputzen

Zwei Kaputzen a und b eines einfachen Polygons heissen getrennt, wenn ab keine Seite des Polygons ist.



R28. Versucht die folgenden einfachen Polygone zu zeichnen oder legt dar, dass dies nicht möglich ist.

- **a.** Ein Viereck mit genau 3 herausstehenden Ecken.
- **b.** Ein Viereck mit 2 herausstehenden Ecken.
- **c.** Ein Viereck mit genau 3 Kaputzen.
- **d.** Ein Viereck mit genau 2 Kaputzen.
- **e.** Ein Viereck mit 2 getrennten Kaputzen.
- **f.** Ein Viereck mit genau 2 verbundenen Kaputzen.

R29. Versucht die folgenden Polygone zu zeichnen oder legt dar, dass dies nicht möglich ist.

- **a.** Ein Polygon mit 5 Seiten und genau 2 Kaputzen.
- **b.** Ein Polygon mit fünf Seiten und genau 2 Kaputzen, wobei die Kaputzen verbunden sind.
- **c.** Ein Polygon mit 12 Seiten und genau 2 Kaputzen.

Für Kaputzen gilt folgender Satz, der dem Satz der 3 herausstehenden Ecken entspricht:

Satz von den zwei getrennten Kaputzen

Jedes einfache Polygon mit mehr als 3 Seiten hat mindestens zwei getrennte Kaputzen.

Diesen Satz könnt ihr auf verschiedene Arten beweisen. Ihr könnt euch selber einen Weg suchen, oder den folgenden Tipp befolgen.

R30. Zeichnet zur Orientierung einige unterschiedliche einfache Polygone.

- **a.** Nehmt für diese Polygone jeweils eine Triangulierung vor. Ihr wisst, dass es immer 2 Dreiecke weniger sind als Seiten.
- **b.** Markiert in der Triangulierung die Dreiecke, die zwei Seiten auf dem Polygon haben.
- **c.** Zeigt: mindestens eine Ecke solch eines Dreiecks von Frage **b** ist eine Kaputze. Es ist die Ecke zwischen den beiden Seiten, die auch Seiten des Polygons sind.

Forschungsauftrag 3

Beweist den

Satz von den zwei untschiedlichen Kaputzen

Jedes einfache Polygon mit mehr als drei Seiten besitzt mindestens zwei unterschiedliche Kaputzen.

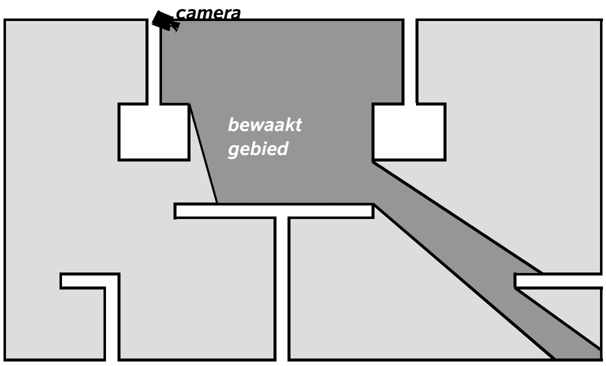
Teil F Bewachte Polygone

Dieser Teil vom Wiskunde B-dag ist von großer praktischer Bedeutung. Es geht um die Überwachung von Räumen. Ihr wollt Kameras aufstellen, die alles überblicken, aber nicht mehr Kameras, als nötig sind. Sie können sich in allen Richtungen drehen. Ausstellungen mit vielen Nebenräumen und Ecken und teuren Sachen, so etwas ist gemeint. Der Grundriss von so einem Ausstellungsraum ist ein Polygon.

In diesem Teil

- Ist das zu überwachende Gebiet immer das Innengebiet eines einfachen Polygons,
- Ist es Bedingung, dass die Kameras nur auf den Ecken des Polygons stehen dürfen.

In der realen Anwendung ist es oft auch so. Das Polygon verläuft dann teilweise an den verschiedenen Seiten der Ausstellungswände, wie in dem Beispiel hier unten zu sehen ist. In diesem Beispiel ist schon eine Kamera aufgestellt und das überwachte Gebiet ist dunkler schraffiert.



Die auf der Hand liegende Frage ist: mit wie wenig Kameras kann der ganze Raum überwacht werden?

R31. Der Grundriss ist auf **Arbeitsblatt R31** nochmals aufgezeichnet, ohne die Kameras. Findet die minimal benötigte Anzahl Kameras.

Die minimale Anzahl der Kameras hängt von der Form des Raumes innerhalb des Polygons ab und von der Anzahl der Ecken. Einige einfache allgemeine Behauptungen sind nicht so schwer zu zeigen oder zu widerlegen.

R32. Zeigt oder gebt ein Gegenbeispiel:

a. Jedes (beinahe-)konvexe Polygon kann durch 1 Kamera überwacht werden.
b. Jedes einfache Fünfeck kann durch 1 Kamera überwacht werden.
c. Jedes Polygon kann überwacht werden, wenn Kameras nur auf allen herausstehenden Ecken plaziert werden.
d. Jedes Polygon kann überwacht werden, wenn Kameras nur auf allen eingestülpten Ecken plaziert werden.

Allgemeiner Satz über bewachte Polygone

Ein einfacher Satz über eine ausreichende Anzahl Kameras ist dieser:

Jedes Polygon mit n Ecken kann durch n – 2 Kameras überwacht werden

Das ist kein beeindruckendes Ergebnis, aber es ist wohl eine Behauptung, die einen Zusammenhang zwischen der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Kameras herstellt. Auch der Beweis ist anschaulich:

Trianguliert das Polygon. Das geht mit n – 2 Dreiecken. Jedes Dreieck kann mit 1 Kamera aus einer Ecke bewacht werden.

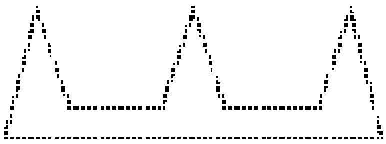
Ein viel besserer Satz, aber wohl schwieriger zu beweisen, ist der folgende.

Satz vom überwachten Polygon

Ein einfaches Polygon mit n Ecken kann immer durch p Kameras überwacht werden, die in den Ecken aufgestellt sind, wobei p der kleinste ganze Wert ist, für den gilt: $p > \frac{1}{3}n - 1$

Es ist deutlich, dass es viele Polygone gibt, die mit viel weniger Kameras überwacht werden können. Aber diesen allgemeinen Satz kann man nicht verbessern!

R33. Zeigt, dass $p = \frac{1}{3}n - 1$ *zu* wenig ist bei n = 9 für ein Polygon wie nebenstehend dargestellt und überprüft dies, indem ihr weitere Beispiele zeichnet, auch für andere Werte für n.

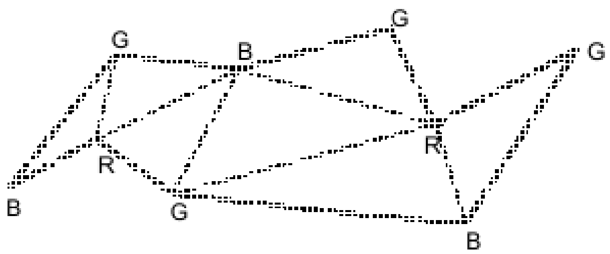


Zwei andere Darstellungen von Polygonen helfen wahrscheinlich bei der Untersuchung:

- das Färben eines Polygons
- das Repräsentieren eines triangulierten Polygon durch ein Baumdiagramm.

Ein Polygon färben

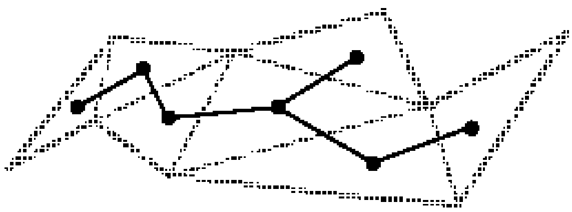
In unten stehendem Beispiel seht ihr eine Färbung der Ecken eines Polygons mit drei verschiedenen Farben (**B**lau,**G**rün und **R**ot). Spielregel bei der Färbung ist, dass zwei Ecken, die mit einer Seite oder einer Diagonalen verbunden sind, verschieden gefärbt sein müssen. Es ist mit drei verschiedenen Farben möglich.
Ihr könnt zeigen, dass eine Färbung mit zwei Farben nie möglich ist, und dass mehr als drei Farben nie nötig sind.

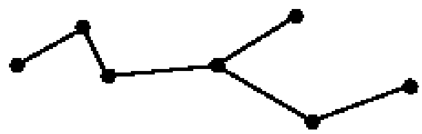


Vielleicht bedarf es, um dabei sicher zu gehen, der folgenden Darstellung eines triangulierten Polygons:

Das Baumdiagramm eines triangulierten Polygons

Ein trianguliertes Polygon kann durch ein Baumdiagramm charakterisiert werden. Das ist eine Ansammlung von Punkten, von denen einige direkt durch Linien miteinander verbunden sind. In das Polygon wird in jedes Dreieck der Triangulierung ein Punkt gesetzt. Die Punkte in den Dreiecken, die eine Seite gemeinsam haben, werden verbunden. Für das oben stehende Polygon ergibt sich folgendes Baumdiagramm (zuerst in das Polygon gezeichnet und daneben ohne das Polygon):





An einem Baumdiagramm, das in der beschriebenen Weise eine Triangulierung eines einfachen Polygons darstellt, könnt ihr zeigen, dass

- nie mehr als drei Linien von einem Punkt ausgehen,
- die Anzahl der Punkte immer eins mehr ist als die Anzahl der Linien,
- es immer wenigstens zwei Punkte gibt mit nur einer Verbindungslinie,
- es nie möglich ist von einem Punkt aus über Verbindungen mit anderen Punkten wieder zum Ausgangspunkt zurückzukehren.

Forschungsauftrag 4

Beweist den

Satz von den überwachten Polygonen

Ein einfaches Polygon mit n Eckpunkten kann immer durch p Kameras überwacht werden, die die in den Eckpunkten aufgestellt werden, wobei p die kleinste ganze Zahl ist, für die gilt: $p > \frac{1}{3}n - 1$