

macht mathe – internationale Mathematikwettbewerbe

Mathematik B-Tag 2013

am 15.11.2013 von 8:00 bis 15:00

Betrachtungen über Spiegel



Erster Weltkrieg: an einer Mauer benutzt ein Mann ein Periskop, um über den Laufgraben zu schauen.

Quelle: www.geheugenvannederland.nl

Erkundung 1 So funktioniert es!

Nehmen Sie sich zehn Minuten Zeit, die Funktionsweise eines Periskops zu erforschen. Informationen dazu finden Sie (zum Beispiel mit Google) im Internet. Nutzen Sie bei Ihren Erklärungen und Skizzen auf jeden Fall die Begriffe 'Spiegel' und 'Lichtstrahlen'. Das ist nämlich das Thema dieses Tages.



Angaben zum Mathematik B-Tag 2013

Das Thema des Tages

An diesem Mathematik B-Tag geht es um Spiegel und Lichtstrahlen. Spiegel kennen Sie bereits. Jeden Tag sehen Sie bestimmt einen, obwohl Sie in dem Moment wohl eher sich selbst betrachten! Lichtstrahlen sieht man eigentlich nicht. Wenn Sie aber verstehen möchten, wie Spiegel funktionieren (und wechselwirken), dann werden Sie Lichtstrahlen als gezeichnete Linien in einer Skizze oder in einer genauen Konstruktion betrachten. In der Erkundung 1 haben Sie das vermutlich schon erfahren. Heute werden Sie mancherlei Phänomene erforschen und erklären, die bei Spiegeln auftreten können.

Aufteilung des Tages

Der Auftrag dieses Tages besteht aus drei Teilen: dem Basisteil, der eigenen Forschung und einer Schlussarbeit.

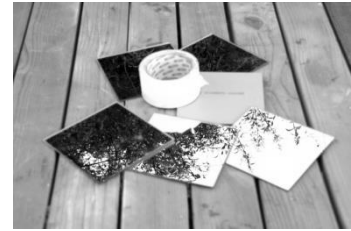
- Der **Basisteil** bereitet auf die eigene Forschung vor. Sie machen sich zu sämtlichen Eigenschaften von Spiegeln und Lichtstrahlen kundig. Die einführenden Fragen (**Erkundung**) dienen dazu, Sie mit einem neuen Thema bekannt zu machen. Von den Fragen, die als **Aufgaben** gekennzeichnet sind, sollten Sie die Lösung mit einer mathematisch korrekten Argumentation in Ihre Schlussarbeit aufnehmen.
- Für Ihre **eigene Forschung** haben Sie die Wahl aus vier eingehenden Forschungsfragen. Aus den Fragen A bis C wählen Sie zwei. Diese Aufgaben sind Fortsetzungen und Vertiefungen dessen, was im entsprechenden Basisteil behandelt wurde. Forschungsfrage D fordert Sie dazu heraus einen Rekord zu brechen. Diesen Versuch können Sie dann zusätzlich in Ihre Schlussarbeit aufnehmen.
- In Ihrer **Schlussarbeit** beschreiben Sie die von Ihnen bei Ihrer eigenen Forschung geleistete Arbeit. Strukturieren Sie diese Arbeit im Aufbau und der Gedankenführung sehr klar und legen Sie große Sorgfalt auf eine genaue und treffende Argumentation. Die Arbeit sollte auch für diejenigen verständlich sein, die nicht am Mathematik B-Tag teilnehmen, aber trotzdem über ausreichend Mathematikkenntnisse verfügen. Das heißt insbesondere, dass Sie Ihr Thema verständlich einführen müssen und dass Sie, wenn nötig, auf das was Sie im Basisteil gelernt haben, zurückgreifen müssen.

Kurzum: Schreiben Sie einen eigenen und klaren Bericht, den Sie mit mathematischen Argumenten untermauern. Auch die Aufmachung wird bei der Bewertung berücksichtigt!

Experimentieren: die verfügbaren Werkzeuge

Es wird heute auch mit echten Spiegeln experimentiert.

- Es werden Ihnen von Ihrem/er Lehrer/in Spiegel und Klebeband - um die Spiegel gelenkig zu verbinden - zur Verfügung gestellt. Benutzen Sie diese Werkzeuge wenn es Ihnen nützlich scheint.
- Weiterhin steht Ihnen ein Applet zur Verfügung, womit Sie Spiegelräume und weitere Konstruktionen mit mehreren Spiegeln simulieren können. Wo Sie das Applet finden, erfahren Sie später in diesem Schreiben.



Zeitliche Aufteilung des Tages

- Nehmen Sie sich die Zeit, den Basisteil zu bearbeiten, damit Sie sich mit den Grundlagen der Spiegelung und den zugehörigen Techniken vertraut machen. Dies darf ruhig mehrere Stunden beanspruchen, zum Beispiel bis 10:30 Uhr.
- Treffen Sie eine Wahl, welche zwei der drei Fragen A bis C Sie für Ihre eigene Forschung bearbeiten möchten.
- Ihre Schlussarbeit soll in digitaler Form abgegeben werden. Wenn Sie Arbeitsblätter anhängen, sollten diese (digital) leserlich sein, also bevorzugt in Graustufen und als PDF-Datei.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg, aber vor allem auch viel Spaß!

Basisteil

A. Der Zusammenhang zwischen Achsensymmetrie und Spiegelung

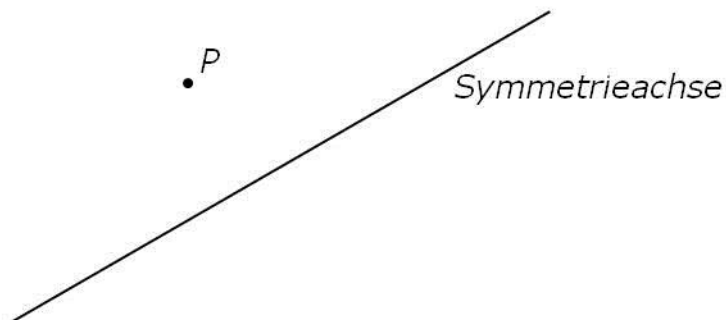
Achsensymmetrie



Die Zeichnung dieses wunderschönen Atlasspinners zeigt eine (fast) vollkommene Achsensymmetrie. Bei einer vollkommenen Achsensymmetrie gibt es eine Linie, so dass wenn die Abbildung entlang dieser Linie gefaltet wird, die entsprechenden Punkte beider Seiten genau aufeinander fallen. Ein Schmetterling zeigt seine Symmetrie auf diese Weise, indem er seine Flügel aufeinander legt.

Erkundung 2 Achsensymmetrie erforschen

In der folgenden Abbildung untersuchen wir die Achsensymmetrie mit Zirkel und Lineal oder mit einem Geodreieck. Die Achse nennen wir die Symmetrieachse.



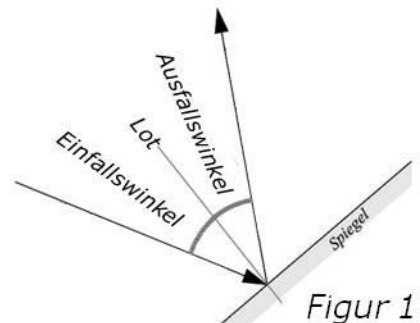
- Bestimmen Sie, entweder mit Zirkel und Lineal oder mit Ihrem Geodreieck, den Punkt P' auf dem rechten Flügel, der mit dem Punkt P übereinstimmt.
- Was können Sie zu dem Zusammenhang zwischen der Symmetrieachse, der Linie PP' und den Abständen von P und P' zur Symmetrieachse sagen?

Der Punkt P' nennen wir das *Spiegelbild* des Punktes P , auch wenn es überhaupt keinen Spiegel gibt. Nun erklären wir weshalb.

Das Reflexionsgesetz

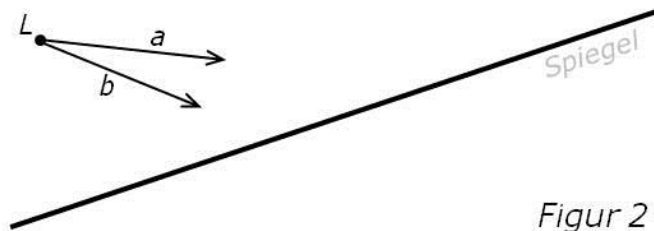
Trifft ein Lichtstrahl einen Spiegel, so wird er vom Spiegel reflektiert. Im Allgemeinen verläuft der reflektierte Strahl aber nicht entlang des gleichen Weges wie der einfallende Strahl. Es gilt das Reflexionsgesetz: **Ausfallswinkel und Einfallswinkel sind gleich groß.**

Liegen einfallender und ausfallender Lichtstrahl in einer Ebene, so bezeichnen wir mit Einfallswinkel bzw. Ausfallswinkel die Winkel bezüglich des Lotes, der Linie die senkrecht auf dem Spiegel steht (siehe Figur 1). Wir werden das Reflexionsgesetz beim Spiegeln verwenden. Ab jetzt gilt es für uns als wichtigste Eigenschaft einer Reflexion.



Von Reflexion zu Spiegelbild

In Figur 2 sehen Sie eine Lichtquelle L , zum Beispiel eine alltägliche Lampe. Sie strahlt ihr Licht in alle Richtungen aus. Zwei von diesen Lichtstrahlen sind ebenfalls gezeichnet (a und b).



Weiterhin sehen Sie einen Spiegel. Die reflektierende Seite des Spiegels befindet sich auf der Seite der Lichtquelle. Wie bei Figur 1 betrachten wir nur Lichtstrahlen, die in der gezeichneten Ebene liegen. Wir vernachlässigen die dritte Dimension.

Aufgabe 1 Woher kommen die reflektierten Strahlen?

- Führen Sie zuerst die Linien a und b bis zum Spiegel weiter. Wenden Sie dann das Reflexionsgesetz an und zeichnen Sie die reflektierten Strahlen.
- Die reflektierten Strahlen sind nur die Hälften zweier unendlichen Linien. Führen Sie diese halben Linien jetzt auch auf der anderen Seite des Spiegels fort und markieren Sie deren Schnittpunkt.
- Der markierte Schnittpunkt hat eine außergewöhnliche Position hinsichtlich der Lichtquelle. Welche Position ist das genau? Weisen Sie die Richtigkeit Ihrer Behauptung nach.

Folgerung: Beim Spiegeln einer Lichtquelle an einem flachen Spiegel scheinen die reflektierten Lichtstrahlen aus einer virtuellen Quelle jenseits des Spiegels zu kommen. Die virtuelle Quelle ist das Spiegelbild der eigentlichen Lichtquelle.

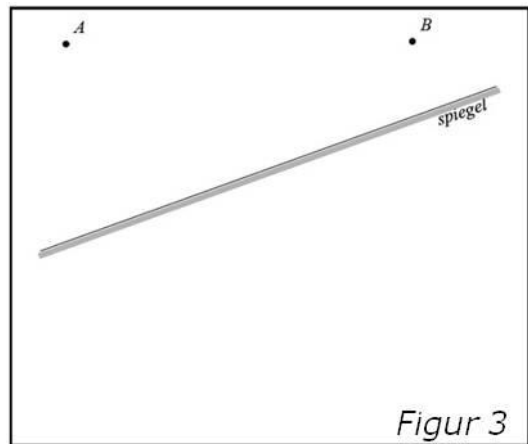
Alles ist eine Lichtquelle

Was für die Lampe aus Aufgabe 1 gilt, stimmt auch für nicht-Lampen. Jedes Objekt, das Sie sehen ist nämlich eine Lichtquelle; Sie sehen das Objekt nur, weil es Licht ausstrahlt. Das Licht stammt zwar ursprünglich aus einer weiteren Lichtquelle (zum Beispiel einer Lampe oder der Sonne), aber das ist irrelevant.

Aufgabe 2 Wie verläuft der Lichtstrahl?

- a. Zeichnen Sie in Figur 3 ganz genau ein, wie der Lichtstrahl von Punkt A über den Spiegel zu Punkt B gelangt. Beachten Sie das Reflexionsgesetz!

Sie haben vielleicht das Spiegelbild A' des Punktes A gezeichnet und diesen Punkt mit dem Punkt B verbunden. Darauf haben Sie dann den Pfad vom Punkt A zum richtigen Punkt auf dem Spiegel gefunden.



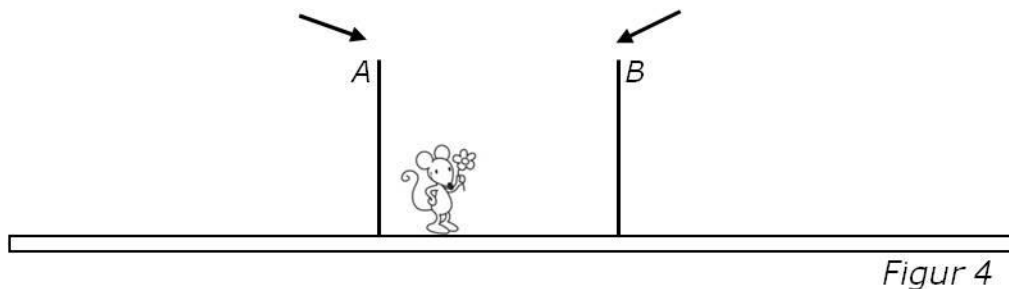
- b. Funktioniert diese Vorgehensweise auch wenn Sie das Spiegelbild B' des Punktes B benutzen? Erhalten Sie das gleiche Ergebnis? Begründen Sie Ihre Aussage mit mathematischen Argumenten.

B. Mehr Spiegel, viel mehr Bilder

In den weiteren Aufgaben wird es sich immer um mehr als einen Spiegel handeln. Sie werden mit Spiegelbildern von Spiegelbildern arbeiten. Das Periskop aus der Erkundung 1 war ein Beispiel hierzu. In diesem Aufgabenteil wird es nützlich sein, mit den Spiegeln zu experimentieren. Wir fangen mit zwei weiteren Beispielen an, danach folgt noch ein wenig Theorie.

Erkundung 3 Ein erstes Experiment

Bauen Sie eine Aufstellung wie in Figur 4 skizziert auf: Zwei Spiegel (A und B , die reflektierenden Seiten einander zugewandt), dazwischen eine Maus mit Blumenstrauß (oder ein anderes nichtsymmetrisches Objekt). Stellen Sie die Spiegel möglichst senkrecht auf den Tisch und parallel zueinander auf.



- a. Schauen Sie entlang einer der beiden Pfeile über den einen Spiegel, so sehen Sie die Maus im anderen. Zeichnen Sie die beiden Spiegelbilder der Maus; achten Sie darauf, dass die gespiegelte Maus den Strauß in der richtigen Hand hält! Benutzen Sie dazu das Arbeitsblatt 1.
- b. Zeichnen Sie auch das Spiegelbild B' des Spiegels B in Spiegel A .

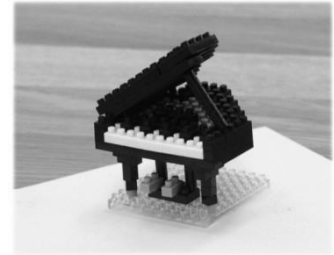
Die Spiegel A und B und der Raum dazwischen, samt Maus, sind Teil der echten Welt. Zusammen nennen wir dies eine Basiszelle. Der Raum zwischen A und B' (samt gespiegelter Maus) ist das Spiegelbild (in Spiegel A) dieser Basiszelle. Da dies ein virtueller Raum ist, nennen wir dies eine virtuelle Zelle.

- c. Zeichnen Sie weitere virtuellen Zellen (Spiegelbilder von Spiegeln usw.) mit Mäusen in die Figur auf dem Arbeitsblatt 1.
- d. Erkennen Sie eine Struktur in Ihrer Folge von Zellen?

Sie wissen jetzt, dass zwei Spiegel unendlich viele Spiegelbilder erzeugen können. Das ist aber nicht das Ende der Geschichte!

Vom Nano-Flügel bis Unendlich mal Unendlich

Der Flügel rechts wurde aus Nano-Lego gebaut und ist ungefähr fünf Zentimeter groß.

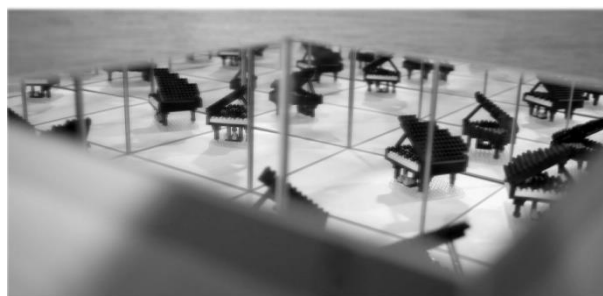


Aus vier Spiegeln stellen wir jetzt ein Viereck zusammen. Schauen Sie sich die nachfolgenden Bilder an, lesen Sie unsere Anweisungen und befolgen Sie diese. Das wird Ihnen helfen, die eine oder andere Sache herauszufinden.

Legen Sie zuerst vier Spiegel nebeneinander, mit der reflektierenden Seite nach unten. Kleben Sie die Spiegel mit zwei Streifen Klebeband zusammen. Stellen Sie die Spiegel aufrecht und schließen Sie das Viereck. So haben Sie einen vierseitigen Spiegelraum gebildet.



Stellen Sie jetzt den Nano-Flügel (oder wiederum ein anderes asymmetrisches Objekt) in Ihrem Spiegelraum auf. Wie erwartet sehen Sie mehrere Spiegelbilder. Wenn Sie knapp über den Rand des Raumes schauen, sehen Sie folgendes:

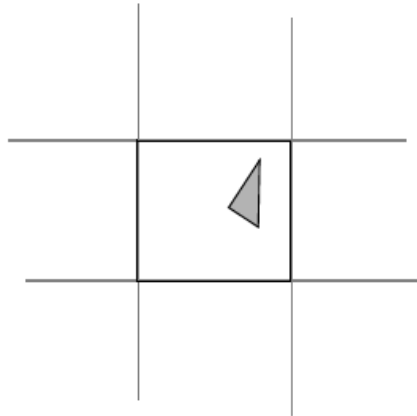


Wenn Sie sich noch weiter nähern, so sehen Sie schließlich einen unendlichen virtuellen Raum. Sie werden feststellen, dass die Nano-Flügel gleichstrukturierte Reihen bilden wie die Mäuse aus Erkundung 3. Es gibt jetzt aber unendlich viele von diesen Reihen nebeneinander, immer mit der gleichen Struktur.

Wie bei den beiden parallelen Spiegeln können Sie den realen Spiegelraum (also die vier Spiegel samt Nano-Flügel) als Basiszelle betrachten. Der weitere (unend-

liche) Raum wird von virtuellen Kopien der Basiszelle (also Spiegelbilder von Spiegelbildern usw.) gefüllt.

Unten wurde die Basiszelle gezeichnet. Der nano-Flügel wird von dem nichtsymmetrischen Dreieck dargestellt. Von oben schauen Sie auf die Basiszelle und den von virtuellen Zellen gefüllten weiteren Raum.



Aufgabe 3 Was ist die Struktur?

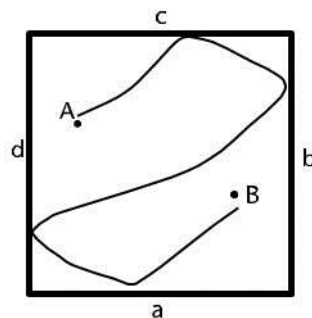
- Zeichnen Sie das Dreieck richtig in jeder der gegebenen virtuellen Zelle auf das Arbeitsblatt 2.
- Welche virtuellen Zellen sind der Basiszelle gleich? Erkennen Sie hier wieder eine Regelmäßigkeit? Geben sie eine mathematische Erklärung.

C. Das ENTFALTUNGS-Verfahren: Lichtpfade bei mehreren Spiegeln

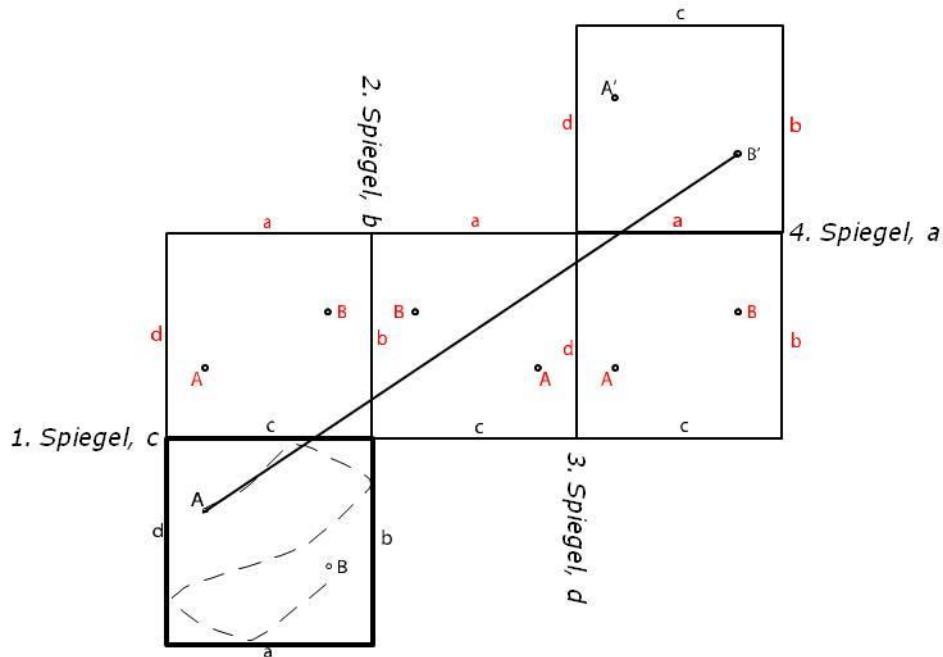
Wir machen weiter mit dem, womit wir in Aufgabe 2 angefangen haben: Lichtpfade mit vorgeschriebenen Anfangs- und Endpunkten über mehrere Spiegel zu bestimmen. Bei einem solchen Problem versuchen Sie sozusagen von einem bestimmten Punkt A aus mit einem Laserpointer über die Spiegel einen Punkt B zu treffen.

Ein Beispiel

Sie sehen einen rechteckigen Spiegelraum (mit den Spiegelwänden a , b , c , d), wo Sie von Punkt A über die Spiegel c , b , d und a zu Punkt B möchten. Eine Skizze ist leicht gemacht:



Um eine genaue Lösung zu finden, spiegeln wir die Basiszelle, mit den Punkten A und B , aufeinanderfolgend in den Spiegeln c , b , d und a :



Nach dem Spiegeln wurde auch die Linie von A zum Spiegelbild B' gezeichnet.

Erkundung 4 Konstruktion des Pfades im eigentlichen Viereck

Vollenden Sie die obige Konstruktion, indem Sie den Lichtpfad in der Basiszelle genau einzeichnen. Spiegeln Sie dazu die Linie wieder in die Basiszelle. Das ist jetzt einfach, da Sie genau ermitteln können, wo die Linie die Spiegel trifft!

Aufgabe 4 Von A nach A' ist auch möglich

- Zeichnen Sie in die obige Figur ebenfalls die Linie von A nach A' . Sie sehen, dass sich jetzt die Folge der Spiegelungen zu c , b , a , d ändert. Zeichnen Sie auch den Lichtpfad in der Basiszelle ein. Benutzen Sie das Arbeitsblatt 3.
- Würden Sie selbst in einem Spiegelraum stehen, so zeigt der Lichtpfad AA' aus Teil **a.**, dass Sie sich selbst im Spiegel sehen. Wie sehen Sie sich selbst jetzt? Sehen Sie Ihr Gesicht, Ihren Rücken oder vielleicht sogar Ihre linke oder rechte Seite?
- Könnten Sie sich selbst auch über nur drei Spiegel sehen? Wie sehen Sie sich selbst in diesem Fall?

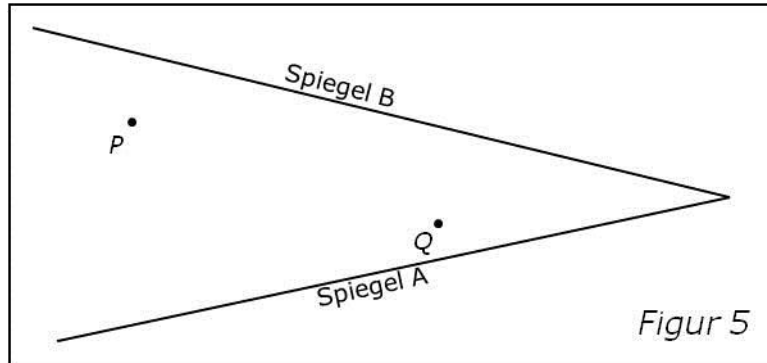
Zusammenfassung des Entfaltungsverfahrens und weitere Beispiele

Im obigen Beispiel arbeiten Sie schneller, wenn Sie direkt schon viele Vierecke zeichnen. Oder möchten Sie lieber gleich kariertes Papier nehmen, in dem Sie dann die Spiegelbilder der Punkte in die virtuellen Zellen einzeichnen? Insbesondere wenn Sie mit Vierecken arbeiten ist dies eine leichte Arbeitsweise.

Im Allgemeinen (also bei anders geformten Basiszellen, mit denen wir jetzt anfangen) ist es vernünftig, anfangs nur einen Spiegel nach dem anderen zu betrachten. Im Beispiel sah dies aus wie eine auseinandergefaltete Figur. Das erklärt ja auch den Namen des Verfahrens.

Aufgabe 5 Zwischen zwei Linien

Auch der Raum zwischen zwei Linien (also zwischen zwei miteinander verbundene Spiegeln, die einen Winkel einschließen) kann als Basiszelle für das Entfaltungsverfahren dienen. Betrachten Sie Figur 5. Für diese Aufgabe steht Ihnen weiterhin auch das Arbeitsblatt 4 zur Verfügung.

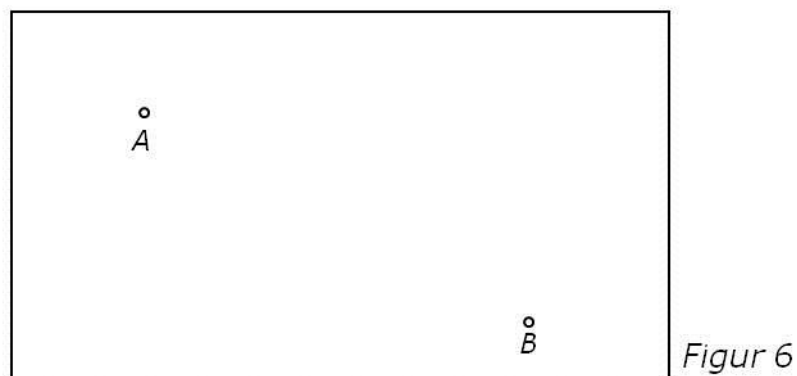


- Zeichnen Sie genau den Lichtpfad vom Punkt P zu Punkt Q über die Spiegel B und A . Erläutern Sie Ihre Arbeitsweise.
- Zeichnen Sie ebenfalls den Pfad von P zu P über - in dieser Reihenfolge - die Spiegel B, A, B und A . Erläutern Sie auch hier Ihre Arbeitsweise.

Beim Billardspielen prallt die Kugel gegen die Bande und bewegt sich dann gemäß dem Prinzip 'Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel' weiter fort. Der Mittelpunkt der Kugel wird sozusagen reflektiert an einer kurz vor der Bande liegenden Linie. So betrachtet ist das Billardspiel eigentlich das gleiche wie Spiegelungen. Wir dürfen hier also wieder das Entfaltungsverfahren anwenden.



In Figur 6 sehen Sie einen Billardtisch von oben. Das Ziel ist es, Kugel A so zu stoßen, dass sie Kugel B erst trifft, nachdem sie zuvor drei Banden berührt hat. Es darf dabei auch zweimal die gleiche Bande getroffen werden; wichtig ist nur das dreimal eine Bande berührt wird.



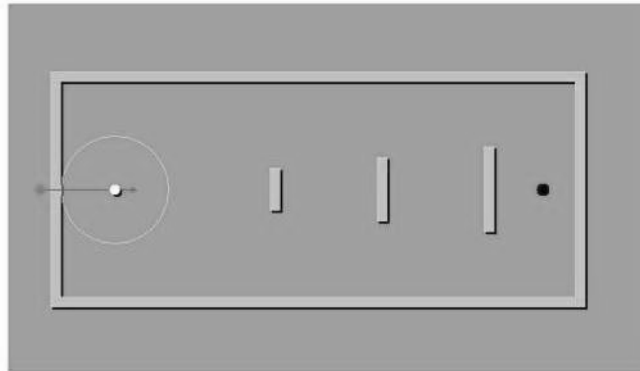
Erkundung 5 Dreiband-Billard

Konstruieren Sie mehrere unterschiedliche Wege für Kugel A , so dass sie Kugel B erst trifft, nachdem sie zuvor drei Banden berührt hat.

Auch Minigolf kann man auf diese Art betrachten.

Erkundung 6 Minigolf (im Netz)

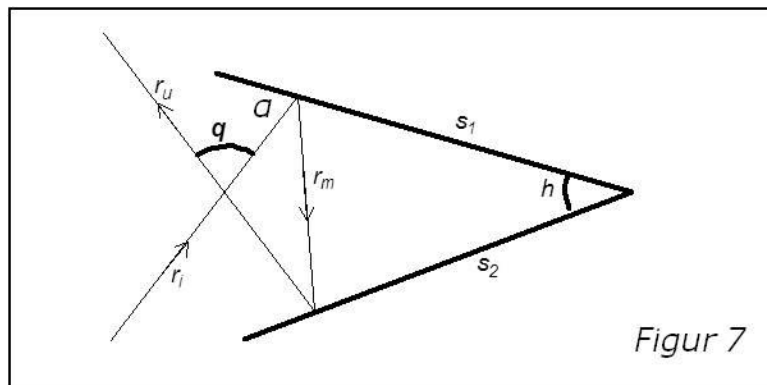
- Spiele Sie zur Erkundung das Online-Spiel auf:
<http://www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/03015/opgave4.html>
- Bestimmen Sie durch eine *genaue* Konstruktion die richtige Schlagrichtung in der folgenden Figur. Gibt es mehrere Möglichkeiten?



D. Lichtpfade bei mehreren Spiegeln

Aufgabe 6 Reflektion an zwei Spiegeln

Stellen Sie sich einen Lichtstrahl vor der, wie in Figur 7, von zwei Spiegeln s_1 und s_2 reflektiert wird.



Den Winkel zwischen den beiden Spiegeln nennen wir h ; der Winkel zwischen einfallendem Strahl r_i und Spiegel s_1 sei a . Den Winkel zwischen dem einfallenden und dem ausfallenden Strahl nennen wir q . Die Frage ist nun, ob es einen Zusammenhang zwischen h und q gibt.

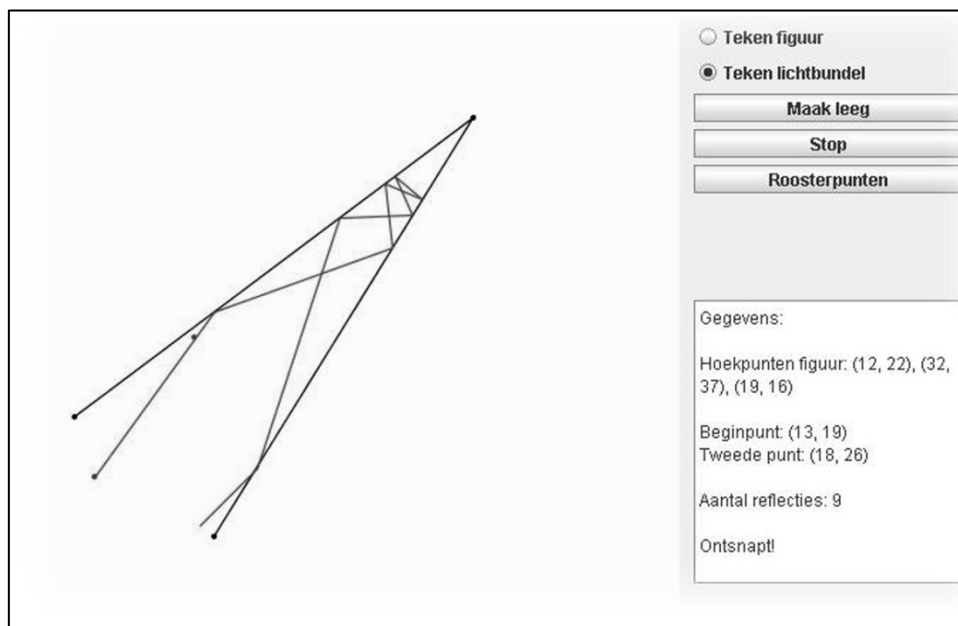
Wir werden dies erst einmal für das Beispiel $h=40^\circ$, $a=60^\circ$ erforschen.

- Bestimmen Sie die Größe des Winkels q .
- Was ändert sich, wenn Sie $a=80^\circ$ und $h=40^\circ$ benutzen?
- Probieren Sie noch einige weitere Zahlenkombinationen für h und a aus. Stellen Sie eine Vermutung über den Zusammenhang zwischen h und q auf.
- Versuchen Sie allgemein zu zeigen (also nicht nur durch Beispielrechnungen), dass Ihre Vermutung richtig ist.
- Es gibt einen bestimmten Winkel h , bei dem die Lichtstrahlen genau in umgekehrter Richtung reflektiert werden. Was heißt das für den Winkel q und was ist dann die Größe des Winkels h ?

Digital erforschen

Unter www.fisme.science.uu.nl/toepassingen/28005/test-de.html steht Ihnen ein Applet zur Verfügung. Das Applet ermöglicht Ihnen, geöffnete oder geschlossene Spiegelräume beliebiger Form zu zeichnen. Klicken Sie dafür im Modus 'Figur erzeugen' einfach auf die erwünschten Eckpunkte. Im Modus 'Lichtstrahl erzeugen' können Sie dann einen Lichtstrahl in Ihrem Spiegelraum reflektieren lassen. Klicken Sie dafür zuerst auf den erwünschten Startpunkt und dann auf einen Punkt in der Richtung in der Sie Ihren Lichtstrahl haben möchten. Das Applet ergibt dann den vollständigen Lichtpfad.

Ein Beispiel aus der niederländischen Ausgabe des Applets:



Das Applet zeigt Ihnen die Koordinate der Eckpunkte Ihres Spiegelraums und die des ersten und zweiten Punktes Ihres Lichtstrahls. Betätigen Sie die Taste 'Gitterpunkte', dann sind nur noch ganzzahlige Koordinaten erlaubt. Bei den Hauptaufgaben C und D werden Sie dies benötigen.

Weitere Angaben:

- Mit der Taste 'Löschen' wird wirklich alles gelöscht, also auch der von Ihnen gezeichnete Spiegelraum. Wenn Sie bei einem Spiegelraum mehrere Lichtstrahlen ausprobieren möchten, bleiben Sie im Modus 'Lichtstrahl erzeugen' und klicken Sie einfach auf neue erste und zweite Punkte.
- Möchten Sie Ihren Raum ändern, so können Sie die Eckpunkte im Modus 'Figur erzeugen' mit der Maus bewegen.
- Die Taste 'Abbrechen' können Sie benutzen, wenn sich das Zeichnen des Lichtstrahls wiederholt.
- Das Applet erzeugt grundsätzlich nur geöffnete Spiegelräume. Wenn Sie einen geschlossenen Raum erzeugen möchten, wählen Sie als letzten Punkt einen Punkt in der Nähe des ersten Punktes. Diesen letzten Punkt ziehen Sie dann zum ersten Punkt, damit der Raum geschlossen wird.

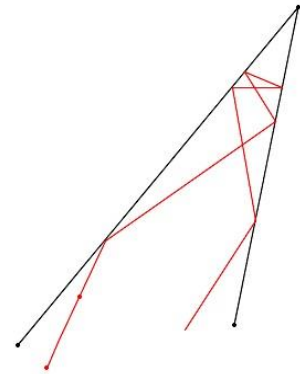
- Wenn ein Lichtstrahl einen Eckpunkt trifft, ist es unklar, wie er seinen Weg fortsetzen soll. Dann bekommen Sie die Mitteilung `Eckpunkt getroffen!` Versuchen Sie mit einem anderen Lichtstrahl weiterzuarbeiten.
- Hin und wieder stürzt das Applet ab. Erneuern Sie dann die Seite, um das Applet neu zu starten.

Die eigene Forschung

Wählen Sie zwei der drei Hauptaufgaben A bis C und bearbeiten Sie diese nach besten Kräften. Zusätzlich könnten Sie sich der Aufgabe D widmen, wo Sie herausgefordert werden, einen Rekord zu brechen.

Hauptaufgabe A: Zwei Spiegel im spitzen Winkel

Befestigen Sie zwei Spiegel mit Klebeband beweglich aneinander, so dass Sie den Winkel zwischen den beiden Spiegeln variieren können. Stellen Sie die Konstruktion jetzt senkrecht auf den Tisch. Wenn Sie ein Objekt zwischen den Spiegeln setzen, so sehen Sie direkt mehrere Spiegelbilder - wie viele Spiegelbilder Sie sehen hängt von dem Winkel ab.



Zielfragen bei Ihrer Forschung:

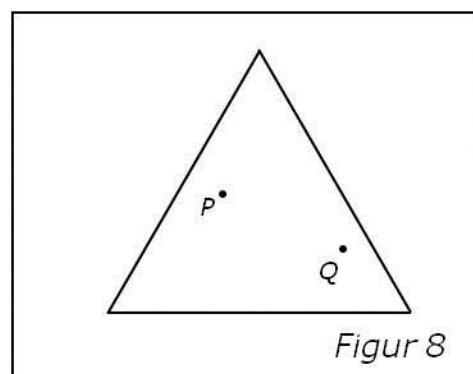
- Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Winkel und der Anzahl der Spiegelbilder?
- Wenn Ihre Konstruktion ausreichend groß ist, sehen Sie auch sich selbst mehrfach in den Spiegeln. Wie oft sehen Sie sich selbst? Ist dies auch von der Größe des Winkels abhängig? Und wie?

Bei dieser Aufgabe lohnt es sich mit dem Applet zu experimentieren, da das Applet Ihnen zeigt, nach wie vielen Reflektionen ein Lichtstrahl wieder aus dem Winkel 'herausreflektiert' wird.

Hauptaufgabe B: Lichtpfade in dreieckigen Spiegelräumen

In den Aufgaben 3 und 4 haben Sie bereits die Struktur des unendlichen virtuellen Raums vier-eckiger Spiegelräume erforscht.

Im dreieckigen Spiegelraum in Figur 8 (ein gleichseitiges Dreieck), werden Sie untersuchen, wie Lichtpfade sich verhalten, die über 1, 2, 3 oder mehr Spiegel laufen. Die Figur 8 enthält ein Beispiel einer Basiszelle, den Raum zwischen den Spiegeln, mit dem Startpunkt P des Lichtstrahls und dem zu erreichenden Endpunkt Q . Die beiden Punkte P und Q dürfen Sie selbstverständlich beliebig wählen.



Schwerpunkte bei der Forschung sind auf jeden Fall:

- Kann man einen Lichtpfad finden, so dass der Strahl nach 1, 2, 3 oder mehr Reflektionen seinen Weg wiederholt? Ist dies abhängig von der Wahl der Punkte P und Q ?
- Wählen Sie P gleich Q , dann können Sie erforschen, ob Sie - würden Sie auf der Stelle des Punktes P stehen - sich selbst über 1, 2, 3, usw. Reflektionen

sehen könnten. Wenn dies der Fall ist, wie sehen Sie sich selbst dann (von vorne, hinten, von der Seite)?

Weitere Zielfragen könnten sich beziehen auf:

- Welche der untersuchten Eigenschaften eines gleichwinkligen dreieckigen Spiegelraums erkennt man auch bei beliebigen dreieckigen Spiegelräumen?

Hauptaufgabe C: Lichtpfade in einem rechteckigen Spiegelraum

Diese Aufgabe bezieht sich auf einen rechteckigen Billardtisch oder einen rechteckigen Spiegelraum. Wie Sie vorher schon erfahren haben, gibt es da eigentlich keinen Unterschied. Da das Applet für diese Aufgabe wieder nützlich sein kann, wählen wir die Spiegelansicht.

Tipp: Schalten Sie die 'Gitterpunkte' ein. Dies ermöglicht Ihnen die Größen genau einzugeben.



Ein Beispiel:

Gegeben ist ein Rechteck von 24 mal 15 Dezimetern. Der Lichtstrahl kommt aus der Ecke links unten in der Figur in einem Winkel von 45° zu beiden Seiten ins Rechteck hinein. Es stellt sich heraus, dass der Strahl nach mehreren Reflexionen eine der drei weiteren Ecken erreicht.

- Welche Ecke genau wird erreicht und nach wie vielen Reflexionen passiert das?
- Würden Sie ein Rechteck von 24 mal 14 oder 24 mal 16 Dezimetern nehmen, dann geschieht etwas anderes. Was genau? Achtung: Betrachten Sie die gleiche Ausgangslage, fangen Sie also in der Ecke links unten mit einem Winkel von 45° zu beiden Seiten an.
- Erforschen Sie die möglichen Ergebnisse bei unterschiedlichen Abmessungen des Rechtecks und versuchen Sie hieraus eine allgemeine Regel zu formulieren. Es wäre schön, wenn Sie mit einer einfachen Rechnung aus gegebenen Seitengrößen bestimmen können, wo der Strahl enden wird.

Bei Ihrer Forschung könnten Sie das Entfaltungsverfahren anwenden. Wenn Sie Koordinaten benutzen, wählen Sie für den Punkt (0,0) am besten die Ecke links unten, also den Startpunkt des Lichtstrahls. So werden nach den Entfaltungen die Koordinaten der virtuellen Eckpunkte Vielfache der Seitengröße sein.

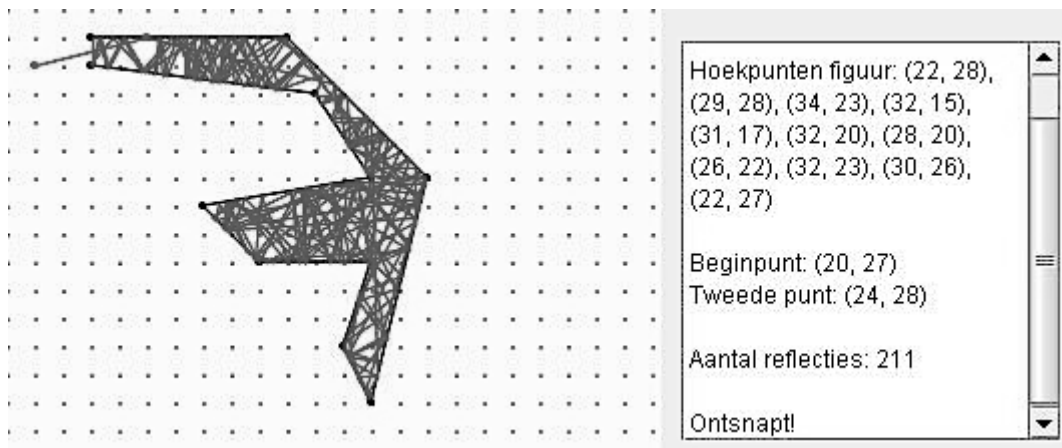
Möglicherweise sind Ihnen die Begriffe des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* und des *größten gemeinsamen Teilers* von Nutzen. Wenn Sie sie nicht kennen, dann sehen Sie auf jeden Fall im Internet nach, was sie bedeuten.

Eventuelle Forschungsfortsetzung:

- d. Was passiert, wenn der Lichtstrahl nicht aus einer Ecke kommt, oder wenn ein Lichtpfad nicht in einer Ecke endet?
- e. Was passiert, wenn der Lichtstrahl unter einem anderen Winkel, aber immer noch in Richtung eines ganzzahligen Punktes, aus der Ecke kommt?

Hauptaufgabe D: Rekordversuch Reflexionszahl

Nachfolgend sehen Sie ein Beispiel (aus der niederländische Ausgabe des Applets) eines reflektierenden Vielecks im Applet: Ein Lichtstrahl tritt durch eine Öffnung in den Raum ein und wird nach vielen Reflexionen wieder heraus reflektiert.



Bislang ist es nicht gelungen, einen Lichtstrahl in ein solches Vieleck zu schicken, so dass er nicht mehr aus dem Raum heraus reflektiert wurde. Wenn auch erst nach vielen Reflexionen, der Lichtstrahl ist immer noch heraus reflektiert worden.

Ihr Rekordversuch:

- Konstruieren Sie ein reflektierendes Vieleck (mit Eingangsöffnung), bei dem eine möglichst große Zahl von Reflexionen mit möglichst wenigen Spiegelwänden erzielt wird. Aktivieren Sie im Applet die Gitterpunkte: im Wettkampf dürfen für die Eckpunkte nur ganzzahlige Koordinaten eingegeben werden.
- Während Ihrer Versuche dokumentieren Sie Ihre Versuche, damit Sie später an jeder Stelle weiterexperimentieren können; das Applet wird Ihnen dabei helfen.
- Wenn Sie meinen, dass Sie einen Rekord gefunden haben, erklären Sie selbstverständlich, weshalb Sie Ihren Spiegelraum genau so gestaltet haben.

Beachten Sie! Es ist wichtig, dass Sie wirklich mit *möglichst wenigen* Spiegelwänden eine möglichst große Zahl von Reflexionen erzielen **und** dass Sie Ihre Entscheidungen über die Form Ihres Raums *begründen* können.

Nehmen Sie einen Screenshot Ihres Rekordversuchs in Ihre B-Tag-Arbeit auf.