

# Wenn der Kanal mal voll ist



**Aufgabe der Vorrunde  
der 35. Mathematik Olympiade  
10. November 2023**

**macht mathe**  
internationale Mathematikwettbewerbe

## Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Olympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

**Marcel Daems**

Gymnasium Sorghvliet, Den Haag

**Eric van Dijk**

Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

**Tom Goris**

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

**Dédé de Haan**

Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

**Senta Haas**

Städtisches Gymnasium Hennef, Deutschland

**Kim Kaspers**

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

**Johan van de Leur**

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

**Matthias Lippert**

Bezirksregierung Köln, Deutschland

**Ruud Stolwijk**

CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

**Monica Wijers**

Freudenthal Instituut, Utrecht

**Sekretariat:**

**Mariozee Wintermans**

Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Olympiade wird **unterstützt** durch:

- das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- die Universitäten zu Bonn, Münster und Paderborn

## Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2023/2024

Liebe Schülerinnen und Schüler,

ihr beteiligt euch heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von euch verlangt. Diese Aufgabe der Mathematik-Alympiade besteht aus neun Aufgaben (Einstiegs- und weiterführenden Aufgaben) sowie zwei Abschlussaufgaben. **Die Einstiegs- und weiterführenden Aufgaben bilden die Vorarbeit für die weiteren Aufgaben:** Die hierbei erzielten Ergebnisse und Überlegungen sind erforderlich, um die weiteren Aufgaben erfolgreich bearbeiten zu können.

### Was ihr abgeben müsst:

- die Ausarbeitung **der Abschlussaufgaben**
- **als Anlage** die Ausarbeitungen zu den (Einstiegs- und weiterführenden) Aufgaben

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eure Arbeit in digitaler Form als **pdf-Dokument (max. 8 MB)**. Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als **ein Gesamtdokument** (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte **nicht eure Namen und den Namen der Schule** in eurer Arbeit.

### Die folgenden Hinweise solltet ihr unbedingt beachten:

- Lest zunächst den ganzen Aufgabentext gründlich durch, so dass ihr einen Überblick über die zu bearbeitenden Aufgaben bekommt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben habt ihr 7 Stunden Zeit. **Plant unbedingt genügend Zeit für die Abschlussaufgaben ein.** Auch das Ausformulieren und Aufschreiben der Lösungen kostet viel Zeit.
- Wenn ihr arbeitsteilig arbeitet, dann stellt einander eure Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor, bevor ihr mit der Hauptaufgabe beginnt.
- Gebt immer an, wenn ihr bestimmte Annahmen macht und begründet diese sinnvoll. Dies gilt auch, wenn ihr im Laufe der Aufgabe diese Annahmen oder Vorgehensweisen verändert.
- Ihr dürft Literatur und digitale Hilfsmittel verwenden. Gebt verwendete Internetquellen in eurer Arbeit an. An der Arbeit darf aber keine weitere Person als die Mitglieder eures Teams beteiligt sein.

### Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit der Ausarbeitungen zur Abschlussaufgabe
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

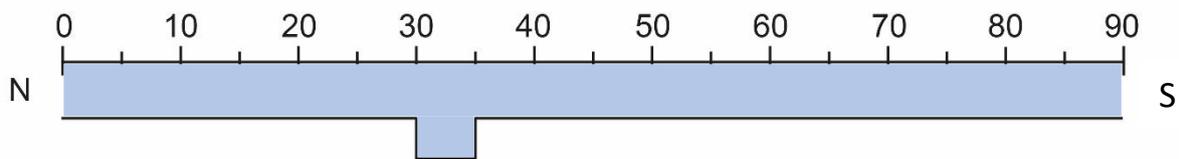
**Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!**

## Einleitung

In der Nähe von Amberhavn liegt der Nord-Süd-Kanal. Dieser Kanal, der 90 km lang und 100 m breit ist, ist eine wesentliche Verkehrsader für den internationalen Handel von und nach Amberhavn. Entlang des Kanals liegen verschiedene Städte und Dörfer. Der Kanal ist in beide Richtungen eine wichtige Verbindung für Frachtschiffe.

Frachtschiffe sind in den vergangenen Jahren immer größer geworden: Die meisten Frachter, die den Kanal passieren, sind 300 m lang und 60 m breit. Diese Maße setzen wir auch in dieser Aufgabe voraus. Außerdem gehen wir davon aus, dass die Schiffe mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h fahren.

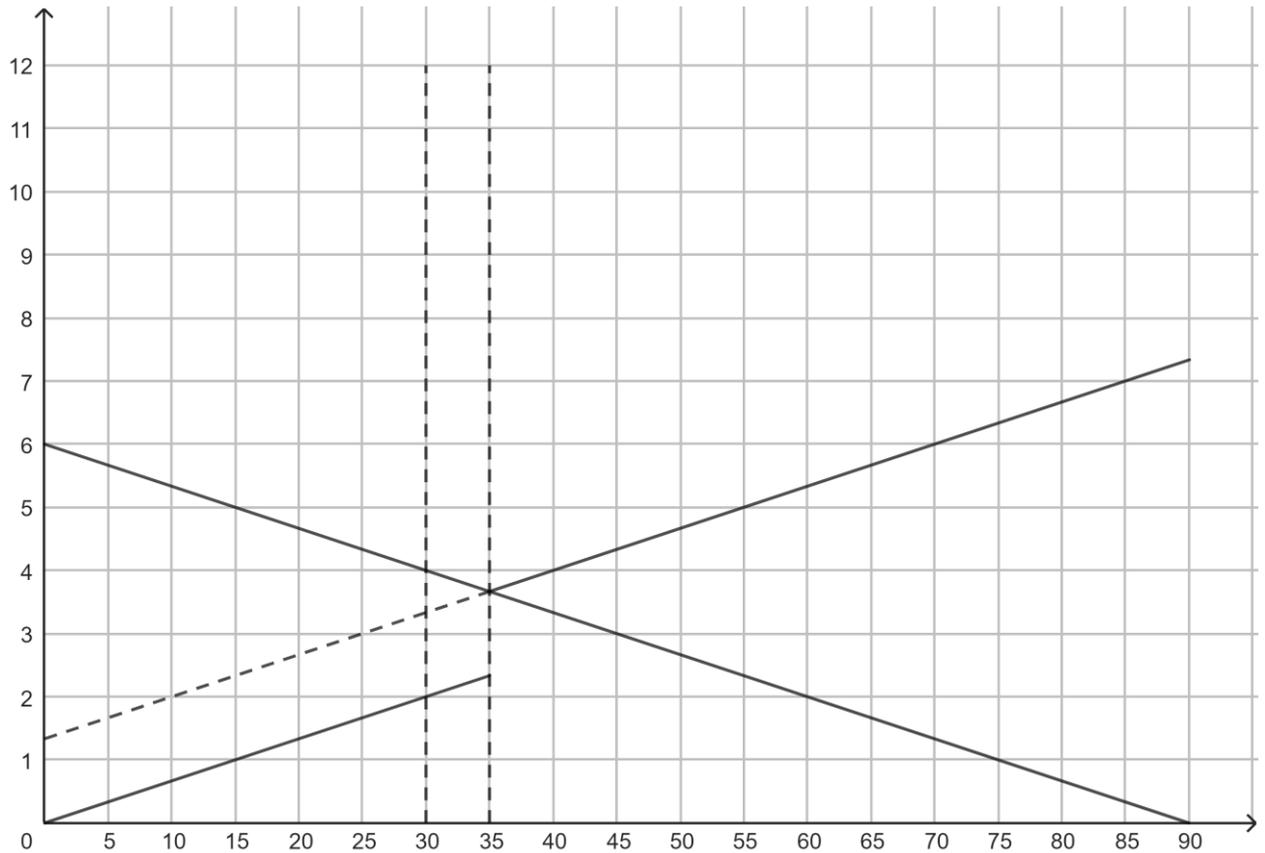
Der Nord-Süd-Kanal besitzt eine Passierbucht für Schiffe. Diese Bucht ist 5 km lang und hat eine Breite von 50 m. Ihr seht hier eine (nicht maßstabgetreue) Skizze des Kanals mit der Passierbucht aus der Vogelperspektive:



## Einstiegsaufgaben: Einzelne Frachter

1. Ein Schiff erreicht aus Richtung Norden kommend um 5:00 Uhr die Einfahrt des Kanals. Wie spät verlässt das Schiff den Kanal wieder, wenn es keinen Gegenverkehr gibt?
2. Sowohl aus Richtung Norden als auch aus Richtung Süden fährt jeweils ein Frachter um 5:00 Uhr in den Kanal ein. Diese Frachter müssen also aneinander vorbeifahren – und das geht nur an einer Stelle. Ermittelt, um wie viel Uhr beide Frachter den Kanal durchfahren haben. Gebt auch an, welches Schiff unterwegs in der Bucht warten muss und wie lange der Wartevorgang dauert.

In der Abbildung auf der nächsten Seite seht ihr einen sog. **graphischen Fahrplan**, in dem die Kanaldurchfahrt zweier Schiffe mit Hilfe der durchgezogenen Linien dargestellt ist. Man kann erkennen, dass das Schiff, welches von Süd nach Nord fährt, ohne Wartezeit durchfahren kann. Das andere Schiff, welches von Nord nach Süd unterwegs ist, muss unterwegs in der Passierbucht warten.



3. Im graphischen Fahrplan erkennt man auch eine diagonal verlaufende gestrichelte Linie. Beschreibt die Bedeutung dieser Linie. Überlegt dazu zunächst, welche Größen an den Achsen dargestellt sind.
4. Untersucht, wie viele Minuten später das aus Nord kommende Schiff abfahren könnte, damit es unterwegs nicht warten muss.
5. Erklärt, warum es nicht günstig wäre, wenn aus Norden kommend jede Stunde ein Schiff in den Kanal einfahren würde.

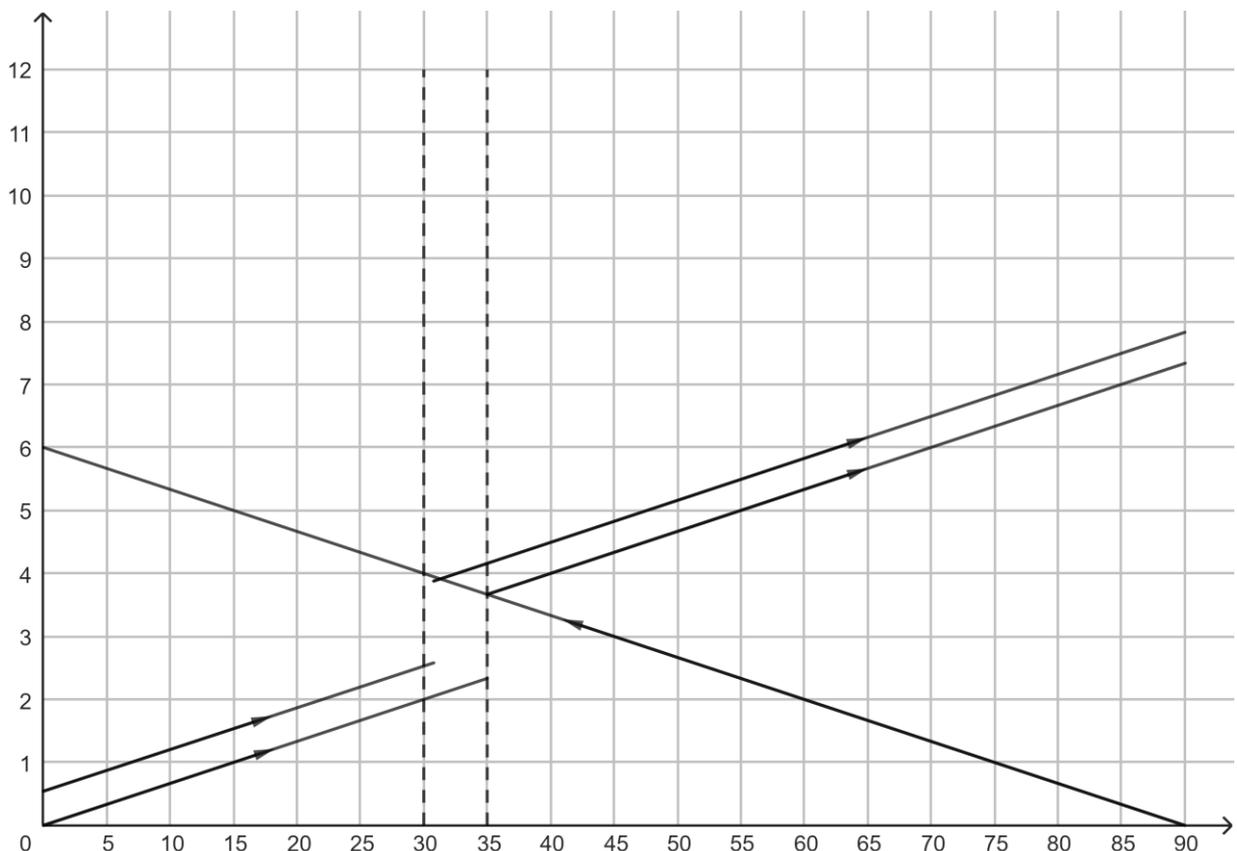
## Weiterführende Aufgaben: Schiffe und Konvois

Um zu erreichen, dass der Kanal in beide Richtungen gut durchfahren werden kann, fahren die Frachter im Kanal in Gruppen, die auch **Konvois** genannt werden. In einem Konvoi fährt eine Gruppe Schiffe mit derselben Geschwindigkeit und mit einem festen Abstand zwischen den einzelnen Schiffen. Der Vorteil solcher Konvois liegt darin, dass das Passieren entgegenkommender Schiffe besser geplant werden kann. Bei mehreren einzelnen Schiffen ist das wesentlich schwieriger und zeitaufwändiger. Bei Konvois dauert es allerdings eine bestimmte Zeit, bis die gesamte Gruppe durchgefahren ist.

Um 0.00 Uhr kommt ein Konvoi aus sechs Schiffen an der nördlichen Einfahrt des Kanals an. Zur selben Zeit fährt ein einzelner Frachter aus Süden in den Kanal ein.

6. Um wieviel Uhr fährt das letzte Schiff des Konvois in den Kanal hinein? Gebt genau an, welche Annahme(n) ihr hierbei macht.

Im untenstehenden graphischen Fahrplan kann man erkennen, dass der einzelne Frachter aus südlicher Richtung ohne Unterbrechung den Kanal bis zum Ende durchfährt, während der Konvoi (der von Nord nach Süd fährt) die Wartebucht nutzt.



7. In Aufgabe 6 habt ihr einen Abstand für die Schiffe innerhalb eines Konvois vorausgesetzt. Entspricht der von euch gewählte Abstand der Schiffe untereinander dem Abstand, der im Graphen erkennbar ist?

Für die Passierbucht gelten die folgenden Regeln:

- Innerhalb der Passierbucht können die Schiffe langsam weiterfahren oder stehenbleiben
  - Ein Schiff muss in der Passierbucht auf seine Weiterfahrt warten, bis kein Schiff aus seinem Konvoi mehr hineinfährt.
  - Ein Schiff muss in der Passierbucht auf seine Weiterfahrt warten, bis kein Schiff aus der entgegenkommenden Richtung mehr an ihm vorbeifährt.
8. Untersucht mit Hilfe des graphischen Fahrplans, wie spät der gesamte Konvoi den Kanal komplett durchfahren hat. Beschreibt dabei detailliert die Fahrt jedes einzelnen Schiffs des Konvois, insbesondere den Aufenthalt bzw. die Durchfahrt durch die Passierbucht.
9. Um 0:00 Uhr starten zwei Konvois mit jeweils 10 Frachtern: der eine Konvoi startet am nördlichen, der andere am südlichen Eingang des Kanals. Beschreibt die Fahrt der beiden Konvois so genau wie möglich und stellt diese in einem graphischen Fahrplan dar. (Hierfür könnt ihr die Vorlage im Anhang verwenden.)

### Abschlussaufgaben

Aufgrund der begrenzten Passiermöglichkeiten sind zu bestimmten Zeiten große Teile des Kanals ungenutzt: Dort fährt kein einziger Frachter. Es stellt sich daher die Frage, wie man die Kapazität des Kanals besser ausnutzen kann.

1. Untersucht, wie viele Schiffe höchstens innerhalb von 24 Stunden durch den Kanal fahren können (von S nach N und von N nach S). Erstellt hierzu ein Schema oder einen graphischen Fahrplan für die optimale Nutzung des Kanals. Berücksichtigt dabei auf jeden Fall die folgenden Aspekte:
- die Anzahl der Konvois
  - die Anzahl der Schiffe pro Konvoi
  - die Zeiten, zu denen die Passierbucht durchfahren wird

Wenn man die Kapazität des Kanals vergrößert, können natürlich mehr Schiffe innerhalb von 24 Stunden durch den Kanal fahren. Das kann z.B. durch die folgenden Maßnahmen geschehen – eigene Vorschläge sind natürlich auch erwünscht:

- die Länge der bestehenden Passierbucht verdoppeln (so dass z.B. auch längere Konvois möglich sind)
  - eine zweite Passierbucht mit einer Länge von 5 km zwischen Kilometer 55 und 60 des Kanals bauen
  - eine zweite Passierbucht an einer anderen Stelle des Kanals bauen
  - ...
2. Formuliert eine gut begründete Empfehlung, welche realistische Option aus eurer Sicht die beste ist. Untersucht hierzu, bei welcher Option die meisten Schiffe innerhalb von 24 Stunden den Kanal durchfahren können.

**Vorlagen**

