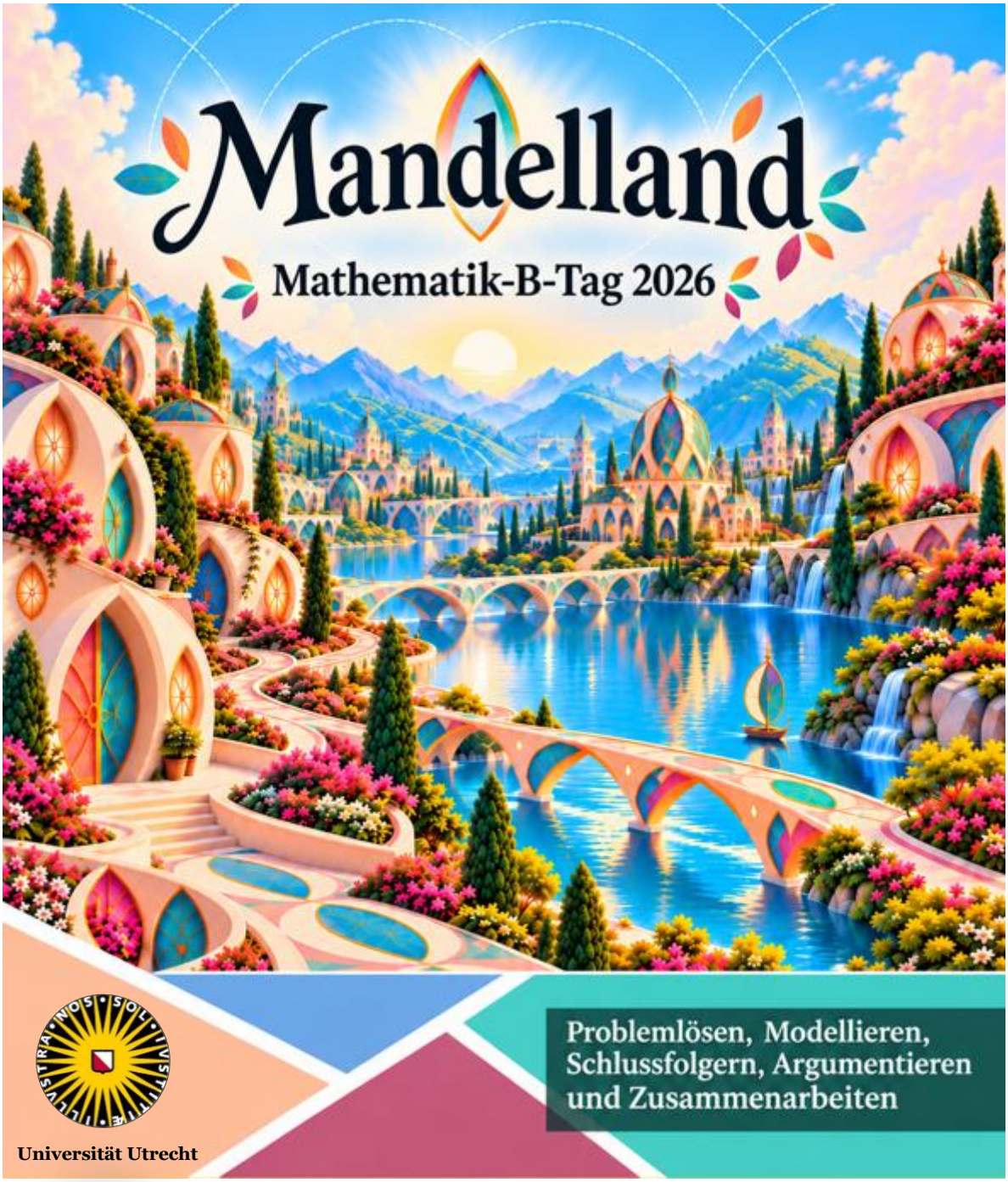


macht mathe

internationale Mathematikwettbewerbe

EINLEITUNG

ÜBER DIE AUFGABEN

Hinter der einfachen Form einer Mandel verbirgt sich überraschend viel Mathematik. Heute reist ihr ins *Mandelland*, eine besondere Welt, in der Mandeln die wichtigsten geometrischen Figuren sind. Auf eurer Entdeckungsreise untersucht ihr, wie sich Mandeln mithilfe von Abständen und Winkeln beschreiben lassen, welche besonderen Figuren sich aus ihnen bilden lassen und welche überraschenden Gesetzmäßigkeiten dabei gelten. Schließlich nutzt ihr eure Erkenntnisse, um selbst neue Fragestellungen zu untersuchen und die Mathematik des Mandellands weiter zu erforschen.

ZUM TAGESABLAUF

Die Aufgaben des Mathematik-B-Tags setzen sich aus Einführungsaufgaben für den Vormittag und zusätzlichen, vertiefenden Aufgaben für den Nachmittag zusammen. Anders als im normalen Mathematikunterricht müsst ihr **nicht alle Aufgaben lösen**. Die Schwierigkeit der Aufgaben variiert von leicht bis schwer. Es wird nicht erwartet, dass ihr alle Aufgaben vollständig löst. Versucht bitte trotzdem, in eurer Ausarbeitung zu zeigen, welche Aufgaben ihr bearbeitet habt und wie weit ihr gekommen seid. Nachdem ihr genügend Zeit mit den Einführungsaufgaben verbracht habt, solltet ihr eine oder mehrere der abschließenden Forschungsaufgaben auswählen, um euch intensiver mit einem Thema auseinanderzusetzen. Mit den Erkenntnissen aus diesen vertiefenden Aufgaben kann sich euer Team besonders auszeichnen!

TEAMARBEIT

Das Besondere am Mathematik-B-Tag ist, dass ihr gemeinsam im Team Mathematik betreibt. Es kann daher sinnvoll sein, einen Zeitplan für den Tag zu machen und die Aufgaben untereinander aufzuteilen. Nutzt dabei die verschiedenen Stärken eurer Teammitglieder. Gebt allen die Möglichkeit, Ideen und Ausarbeitungen einzubringen. Ihr könnt entweder zeitgleich an verschiedenen Aufgaben arbeiten oder euch zusammen ein Problem anschauen und dieses diskutieren, um zu einer gemeinsamen Lösung zu gelangen. Bei einigen Aufgaben ist es sinnvoll, sich verschiedene Beispiele anzuschauen. Auch das kann gut im Team aufgeteilt werden.

HILFSMITTEL

Für die Bearbeitung benötigt ihr heute: einen runden Gegenstand, beispielsweise einen Pappbecher, oder einen Zirkel, einen Stift, farbige Stifte oder Buntstifte, ausreichend kariertes Papier und diese Aufgabenstellung. Die Verwendung von Informationen aus dem Internet ist **nicht erlaubt**.
Solltet ihr in Versuchung kommen, unerlaubte Hilfsmittel zu verwenden, so beachtet bitte, dass der Wettbewerb B-Tag zum Ziel hat, dass sich Schülerinnen und Schüler forschend und untersuchend mit Problemen der Mathematik beschäftigen und dabei ihre eigenen kreativen Ideen entwickeln. Die vier besten Teams aus NRW qualifizieren sich für einen zweitägigen Workshop in Soest, bei dem sie sich in Gruppen, angeleitet durch Professoren und Mitarbeiter der Universität, mit vergleichbaren Fragestellungen beschäftigen. Auch dabei geht es immer um die eigenständige Leistung.

WAS MÜSST IHR ABGEBEN?

Im Laufe des Tages erstellt ihr einen **Bericht,** entweder in digitaler Form oder auf Papier, je nachdem, was eure Lehrerin oder euer Lehrer vorgibt. Ihr solltet nicht zu spät beginnen, damit ihr diesen nach 7 Stunden Arbeitszeit pünktlich einreichen könnt. In eurer Ausarbeitung beschreibt ihr eure

Überlegungen und Ergebnisse zu den einzelnen Aufgaben. Formuliert eure Lösungen klar und überzeugend in eigenen Worten. Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte und insbesondere auch originelle, kreative und sprachlich ansprechende Berichte.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format (max. 8 MB) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

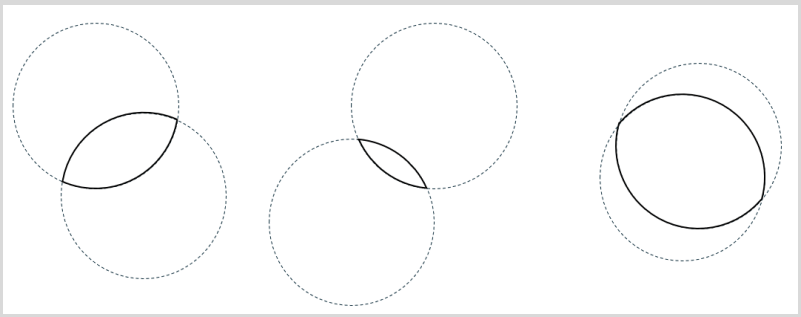
Tipps zum Schreiben und zur Gestaltung des Berichts:

- Es kann sinnvoll sein, mit dem Schreiben von Teilen der Ausarbeitung bereits am Vormittag zu beginnen.
- Formuliert verständlich, so dass auch jemand, der nicht am Mathematik-B-Tag teilgenommen hat (aber über genügend mathematische Kenntnisse verfügt), euren Text verstehen kann, ohne dass er oder sie die Aufgaben gelesen hat. Übernehmt die Aufgabenstellungen möglichst nicht wörtlich, sondern verfasst einen zusammenhängenden, anschaulichen Bericht, in dem ihr eure Überlegungen und Ergebnisse in eigenen Worten darstellt.
- Das Untersuchen und Begründen mathematischer Zusammenhänge ist das Herzstück des Mathematik-B-Tages. Wenn ihr eure Ergebnisse begründet oder erklärt, versucht, dies möglichst mit mathematischen Argumenten zu unterstützen. Je genauer und detaillierter eure Argumentation ist, desto besser. Wenn ihr an einem Sachverhalt noch Zweifel habt, könnt ihr dies in eurer Ausarbeitung wie folgt angeben: „Wir vermuten, dass …“. Das kann ebenfalls sehr wertvoll sein.
- Verwendet Zeichnungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung fließen in die Beurteilung ein!

EINFÜHRUNGSAUFGABEN

Das Mandelland ist eine besondere Welt. Es ist zweidimensional, also eine Ebene. Außerdem gibt es dort keine geraden Linien, sondern nur Mandeln.

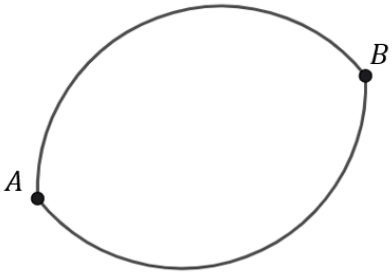
Eine **Mandel** besteht aus zwei Kreisbögen mit Radius 1, wobei die Kreisbögen jeweils höchstens so lang wie ein Halbkreis sind.





Wir legen fest, dass der Radius der Kreise 1 beträgt (wie in der Mathematik üblich, verzichten wir auf die Angabe von Einheiten). Entscheidend ist jedoch, dass ihr heute den ganzen Tag über **denselben Radius** verwendet. Benutzt daher zum Zeichnen der Mandeln immer denselben Pappbecher, dieselbe Münze oder dasselbe Glas oder stellt euren Zirkel auf einen festen Radius ein. Zeichnet nun zur Übung einige unterschiedlich große Mandeln.

Von Geraden haben die Bewohnerinnen und Bewohner des Mandellands noch nie etwas gehört (die Armen…). Natürlich wird im Mandelland trotzdem jede Menge Geometrie betrieben.

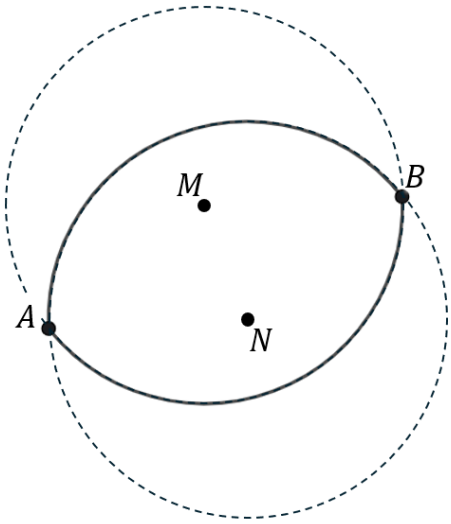


Eine Mandel hat zwei **Endpunkte**. In der obigen Abbildung sind dies die Punkte A und B. Genau wie es in der uns vertrauten Geometrie durch zwei Punkte genau eine Gerade gibt, gibt es im Mandelland zu zwei vorgegebenen Endpunkten genau eine Mandel, vorausgesetzt, ihr Abstand beträgt höchstens 2.

AUFGABE 1
Erklärt, warum es zu zwei vorgegebenen Endpunkten genau eine Mandel gibt, sofern der Abstand zwischen den beiden Punkten höchstens 2 beträgt.

Wir können die eindeutig bestimmte Mandel mit den Endpunkten A und B als **Mandel** AB bezeichnen.

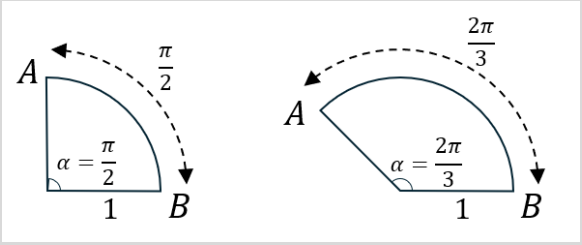
Die beiden Mittelpunkte der Kreisbögen einer Mandel nennen wir **Mandelmittelpunkte**.



Als „normale Bewohnerinnen und Bewohner der Welt" stehen euch (gerade) Linien zur Verfügung, die ihr nutzen werdet, um das Mandelland besser zu verstehen.

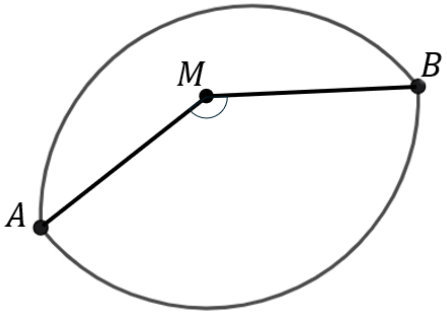
AUFGABE 2
Angenommen, eine Mandel AB hat die Mandelmittelpunkte M und N. Erklärt, warum die Strecke AB senkrecht zu der Strecke MN steht. Um welche Art von Vieleck handelt es sich bei $AMBN$?

Da im Mandelland alle Kreise den Radius 1 haben, misst man Winkelgrößen einfach anhand der Länge der zugehörigen Kreisbögen:



Im Mandelland würde man sagen, dass ein rechter Winkel die Größe $\pi/2$ hat. Entsprechend würde man bei einem Winkel von 120° (also 1/3 eines Kreises) sagen, dass der zugehörige Kreisbogen ein Drittel des Kreisumfangs von 2π umfasst, also die Länge $2\pi/3$ hat. Auch wir kennen diese Einheit zur Winkelmessung und nennen sie **Radiant** oder **Bogenmaß**. Um einen Winkel von Grad in Radiant umzurechnen, teilt man die Gradzahl durch 360 und multipliziert das Ergebnis mit 2π.

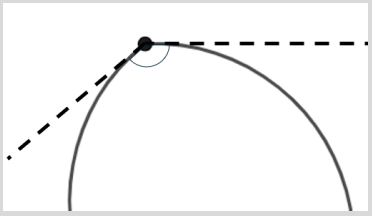
Bei einer Mandel AB mit Mandelmittelpunkt M bezeichnen wir den Winkel $\angle AMB$ als **Mittelpunktswinkel**[1].



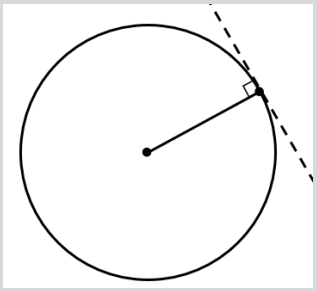
AUFGABE 3
Eine Mandel hat zwei Mandelmittelpunkte M und N und damit auch zwei Mittelpunktswinkel. Erklärt, warum die beiden Mittelpunktswinkel gleich groß sind und weshalb somit auch die beiden Kreisbögen einer Mandel gleich lang sind.

Die Winkelgrößen, bei denen es sich wie oben beschrieben um die Längen der zugehörigen Kreisbögen handelt, bezeichnen wir mit (AB). Diese Schreibweise kann sich je nach Zusammenhang sowohl auf einen Winkel als auch auf eine Bogenlänge beziehen.

Der Winkel zwischen zwei Kurven, die sich in einem Punkt treffen, ist der Winkel zwischen den beiden Tangenten in diesem Punkt:

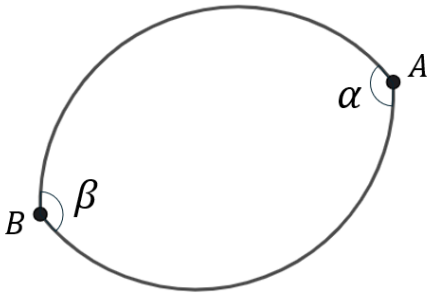


Ein wichtiger Satz besagt, dass die Tangente an einen Kreis in jedem Berührpunkt senkrecht auf dem zugehörigen Radius steht.



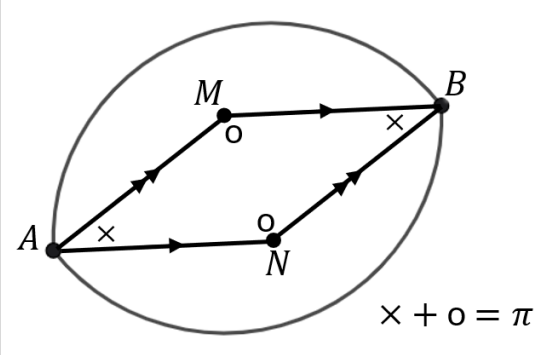
[1]Im Mandelland selbst ist dieser Begriff nicht bekannt, da man zu seiner Beschreibung gerade Linien benötigt.

An den Punkten A und B, an denen die beiden Kreisbögen einer Mandel aufeinandertreffen, entstehen zwei Innenwinkel α und β. Diese Winkel nennen wir **Mandelwinkel**.

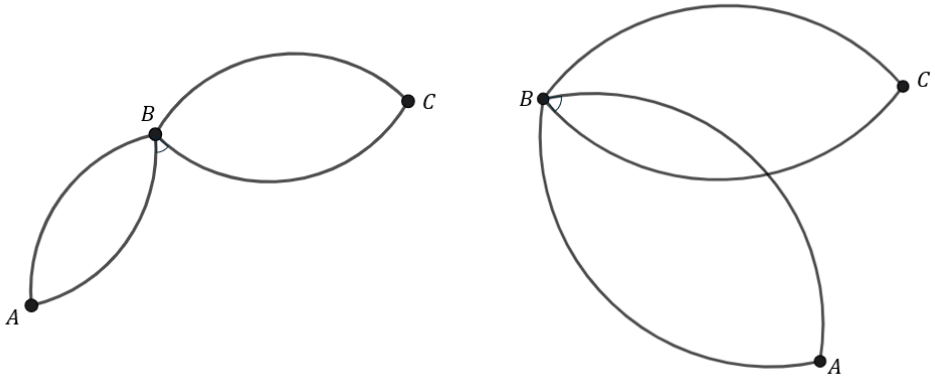


AUFGABE 4
Erklärt, warum die beiden Mandelwinkel α und β gleich groß sind. Begründet, warum sie genauso groß sind wie die Mittelpunktswinkel (AB).

Für die späteren Aufgaben sind zwei Erkenntnisse besonders hilfreich: Zum einen habt ihr in den Aufgaben 3 und 4 gelernt, dass die Bogenlängen, Mandelwinkel und Mittelpunktswinkel übereinstimmen; zum anderen bilden die Endpunkte und die beiden Mandelmittelpunkte einer Mandel zusammen eine Raute, bei der (1) gegenüberliegende Seiten parallel sind, (2) gegenüberliegende Winkel gleich groß sind und (3) sich benachbarte Winkel zu 180° ergänzen.



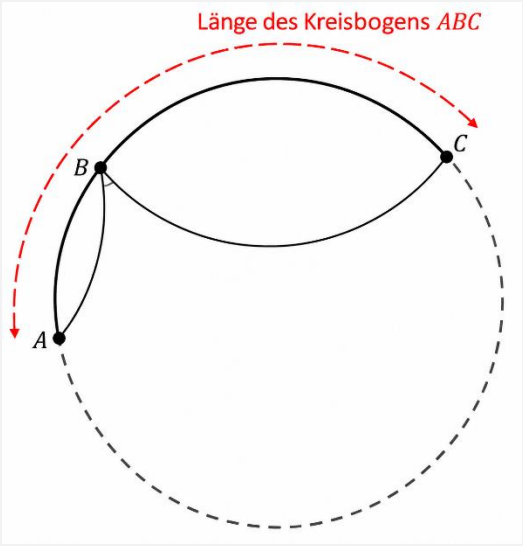
Für zwei Mandeln AB und BC kann der Winkel zwischen ihnen als Winkel zwischen den Kreisbögen beziehungsweise deren Tangenten betrachtet werden, wie in der Abbildung unten links dargestellt. Ein solcher Winkel ist negativ, wenn sich die Mandeln überlappen, wie in der Abbildung unten rechts zu sehen ist. Wir bezeichnen diesen Winkel mit $\measuredangle ABC$.



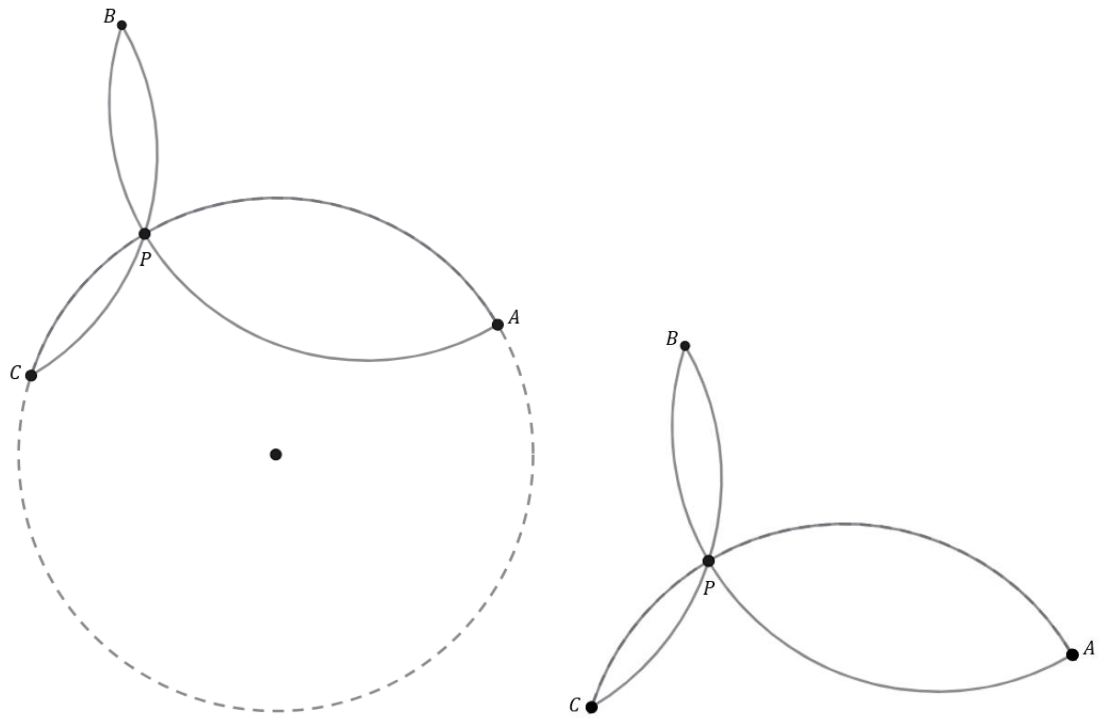
AUFGABE 5

Gegeben sind zwei Mandeln AB und BC, die auf einem Kreisbogen eines Kreises (mit Radius 1) liegen, wie in der folgenden Abbildung dargestellt.

Zeigt, dass für den Winkel $\measuredangle ABC$ gilt, dass $\measuredangle ABC = \pi -$ „Länge des Kreisbogens ABC" und dass seine Größe daher nicht von der Lage des Punktes B auf dem Kreis abhängt.



Ein **Mandelkleeblatt** entsteht, wenn man in der Situation aus Aufgabe 5 zwei Kreisbögen so verlängert, bis sie sich erneut schneiden (vorausgesetzt, der Winkel zwischen den Mandeln ist positiv). Die in der folgenden Abbildung durch verlängerte Kreisbögen entstehende Figur ist ein solches Mandelkleeblatt: Die drei Mandeln AP, BP und CP treffen sich in einem Punkt P, sodass jeweils zwei Mandeln Kreisbögen besitzen, die auf demselben Kreis liegen (wie in Aufgabe 5).



Mandelkleeblätter haben viele besondere Eigenschaften:

I. $(BP) + (AC) = \pi$
$(AP) + (BC) = \pi$
$(CP) + (AB) = \pi$

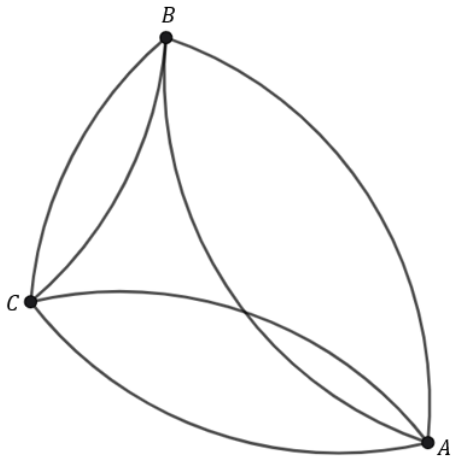
II. Die Strecken BP und AC stehen senkrecht aufeinander.
Die Strecken AP und BC stehen senkrecht aufeinander.
Die Strecken CP und AB stehen senkrecht aufeinander.

III. Die Punkte A, B und C liegen auf einem Kreis mit Radius 1.

AUFGABE 6
Beweist Eigenschaft I. Nutzt diese Eigenschaft, um zu erklären, warum die Bogenlänge (und der Mandelwinkel) (BP) nicht von der Lage des Punktes P auf dem Kreisbogen abhängt. Überprüft dies, indem ihr die Mandel BP für verschiedene Lagen des Punktes P zeichnet.
Beweist auch Eigenschaft II.

Der Beweis von Eigenschaft III ist Teil einer der weiterführenden Forschungsaufgaben (siehe unten). Auch wenn ihr euch nicht für diese Aufgabe entscheidet, dürft ihr die Eigenschaft im weiteren Verlauf verwenden.

Die Bewohnerinnen und Bewohner des Mandellands lieben Mandelkleeblätter, aber auch Mandeldreiecke. Ein **Mandeldreieck** entsteht, wenn drei Punkte paarweise durch jeweils eine Mandel verbunden werden.



Der **Umfang eines Mandeldreiecks** ist $p(ABC) = (AB) + (BC) + (CA)$.

AUFGABE 7

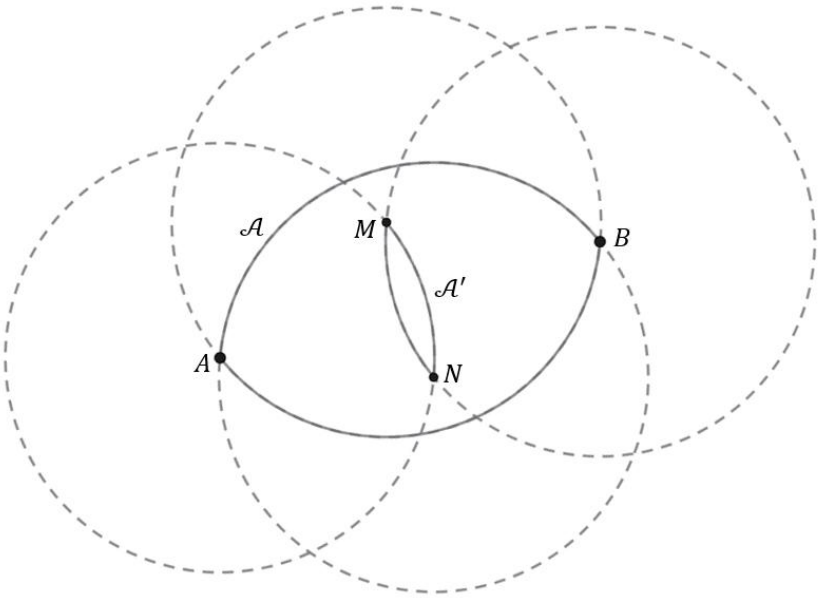
a. Begründet, warum für die Summe der Winkel eines Mandeldreiecks $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB$ gilt, dass

$$\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = \pi - p(ABC)$$

Hinweis: Zeichnet das gewöhnliche Dreieck ΔABC und nutzt das Ergebnis aus Aufgabe 4.

b. Verallgemeinert euer Ergebnis auf Mandelvielecke mit mehr Eckpunkten.

Jede Mandel $\mathcal{A}$ hat eine Geschwistermandel $\mathcal{A}'$, die sogenannte **duale Mandel**. Das ist die Mandel, deren Endpunkte die Mandelmittelpunkte der ursprünglichen Mandel $\mathcal{A}$ sind.



Duale Mandeln haben unter anderem die folgenden Eigenschaften:

I. $(AB) + (MN) = \pi$

II. $|AB|^2 + |MN|^2 = 4$

Anmerkung: $|AB|$ steht hier für die gewöhnliche Länge der Strecke AB.

AUFGABE 8
Beweist die Eigenschaften I und II.

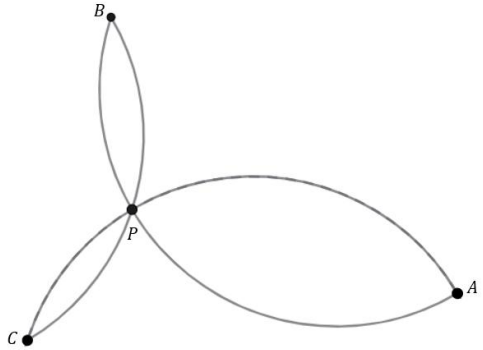
VERTIEFENDE AUFGABEN: EIGENE FORSCHUNG

Wir laden euch nun ein, eines (oder mehrere) der unten aufgeführten Themen auszuwählen und dazu eigene Forschungen durchzuführen.

Zur Erinnerung: Euer Forschungsbericht besteht aus einer Einleitung auf Grundlage eurer Ergebnisse zu den Einführungsaufgaben. Anschließend beschreibt ihr eure Vorgehensweise und eure Ergebnisse zu mindestens einer der Untersuchungen, die ihr aus den folgenden Möglichkeiten auswählen könnt.

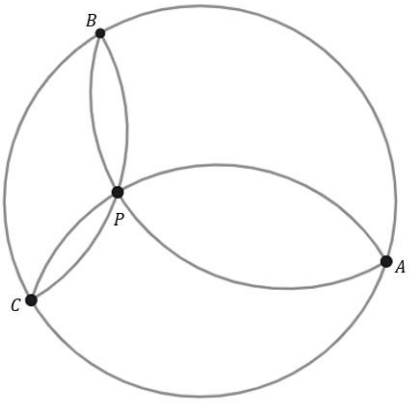
FORSCHUNG 1

Zurück zu den Mandelkleeblättern:



Beweist Eigenschaft III (vgl. Seite 9).

Wenn ihr den Kreis aus Eigenschaft III einzeichnet, seht ihr, dass die Mandeln AB, BC, CA ein besonderes Mandeldreieck bilden: nämlich eines, bei dem die Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius 1 liegen.



Untersucht:

- Könnt ihr einen Zusammenhang zwischen den Winkeln und den Kreisbögen des oben beschriebenen Mandeldreiecks beziehungsweise Mandelkleeblattes finden?
- Wenn die Punkte A, B und C eines Mandeldreiecks auf einem Kreis mit Radius 1 liegen, verlaufen die drei Mandeln dann immer durch einen gemeinsamen Punkt? Falls nicht, gebt ein Gegenbeispiel an. Falls doch, erklärt, warum das so ist.

FORSCHUNG 2

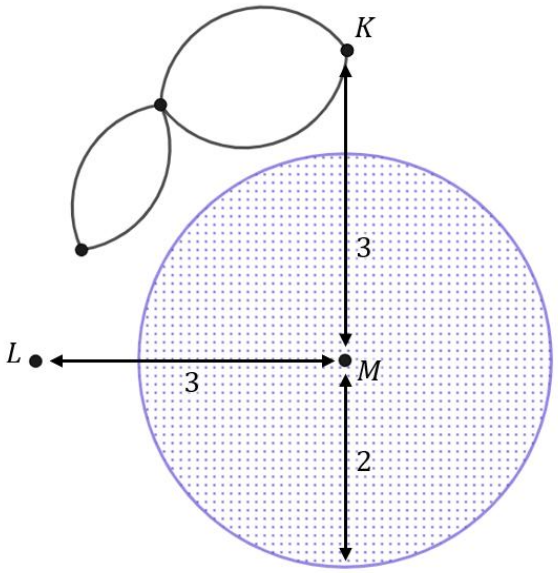
Untersucht, was passiert, wenn ihr zu den Mandeln eines Mandeldreiecks jeweils die duale Mandel bildet:

- Entsteht dabei wieder ein Mandeldreieck?
- Was passiert, wenn die Eckpunkte auf einem Kreis mit Radius 1 liegen?
- Wie verändern sich die Mandelwinkel?

Stellt darüber hinaus eigene Fragen zu diesem Thema und untersucht diese.

FORSCHUNG 3

Die Bewohnerinnen und Bewohner des Mandellands möchten einen Weg von Punkt K zu Punkt L um einen kreisförmigen See mit Radius 2 herum bauen. Die Punkte K und L haben jeweils Abstand 3 vom Mittelpunkt M des Sees und der Winkel $\angle KML$ ist ein rechter Winkel. Für den Weg steht ein Budget zur Verfügung, das für drei mandelförmige Wegabschnitte reicht (zum Glück, denn mit zwei funktioniert es nicht). Die Bewohnerinnen und Bewohner des Mandellands möchten die **kürzest mögliche Verbindung** finden. Dabei wird die Länge eines Weges entlang seines Randes gemessen (ein Wegabschnitt von A nach B hat Länge (AB) oder mit anderen Worten: es geht um den Mandelabstand zwischen A und B).



Untersucht: Wie sollte der Weg eurer Meinung nach gebaut werden, damit er möglichst kurz ist? Der Weg darf nicht durch das Wasser führen. Das heißt, die Mandeln müssen vollständig außerhalb des kreisförmigen Sees liegen.

Erklärt:

1. wie ihr den Weg konstruiert habt,
2. wie lang der Weg ist (näherungsweise oder exakt),
3. warum der Weg nicht kürzer sein kann.

Zusatzaufgabe: Denkt euch eine weitere Aufgabe aus, bei der wie oben ein möglichst kurzer Weg gebaut werden soll, und löst sie. Versucht, die Aufgabe so anspruchsvoll zu gestalten, dass sie für euer Team eine Herausforderung darstellt, aber dennoch lösbar ist.

FORSCHUNG 4

Erstellt eine künstlerische Zeichnung mithilfe von

- Mandelvielecken,
- miteinander verbundenen Mandelkleeblättern,
- dualen Mandeln,
- …

Erklärt, wie eure Konstruktion entstanden ist, und diskutiert ihre künstlerischen und mathematischen Aspekte. Aus mathematischer Sicht könnt ihr beispielsweise die Berechnung von Winkelgrößen und Bogenlängen, die in eurer Konstruktion vorkommen, Symmetrien sowie Vermutungen oder Sätze über Muster in eurer Zeichnung untersuchen. Diese mathematischen Überlegungen spielen auch bei der Bewertung eine wichtige Rolle.

FORSCHUNG 5

Was könnt ihr über den Flächeninhalt einer Mandel herausfinden?

- Wie hängt er vom Mandelwinkel ab?
- Wie sieht es mit dem Flächeninhalt eines Mandeldreiecks aus?
- Wie groß ist der Flächeninhalt eines Mandelkleeblatts?
- Wie groß ist der Flächeninhalt einer dualen Mandel?
- …