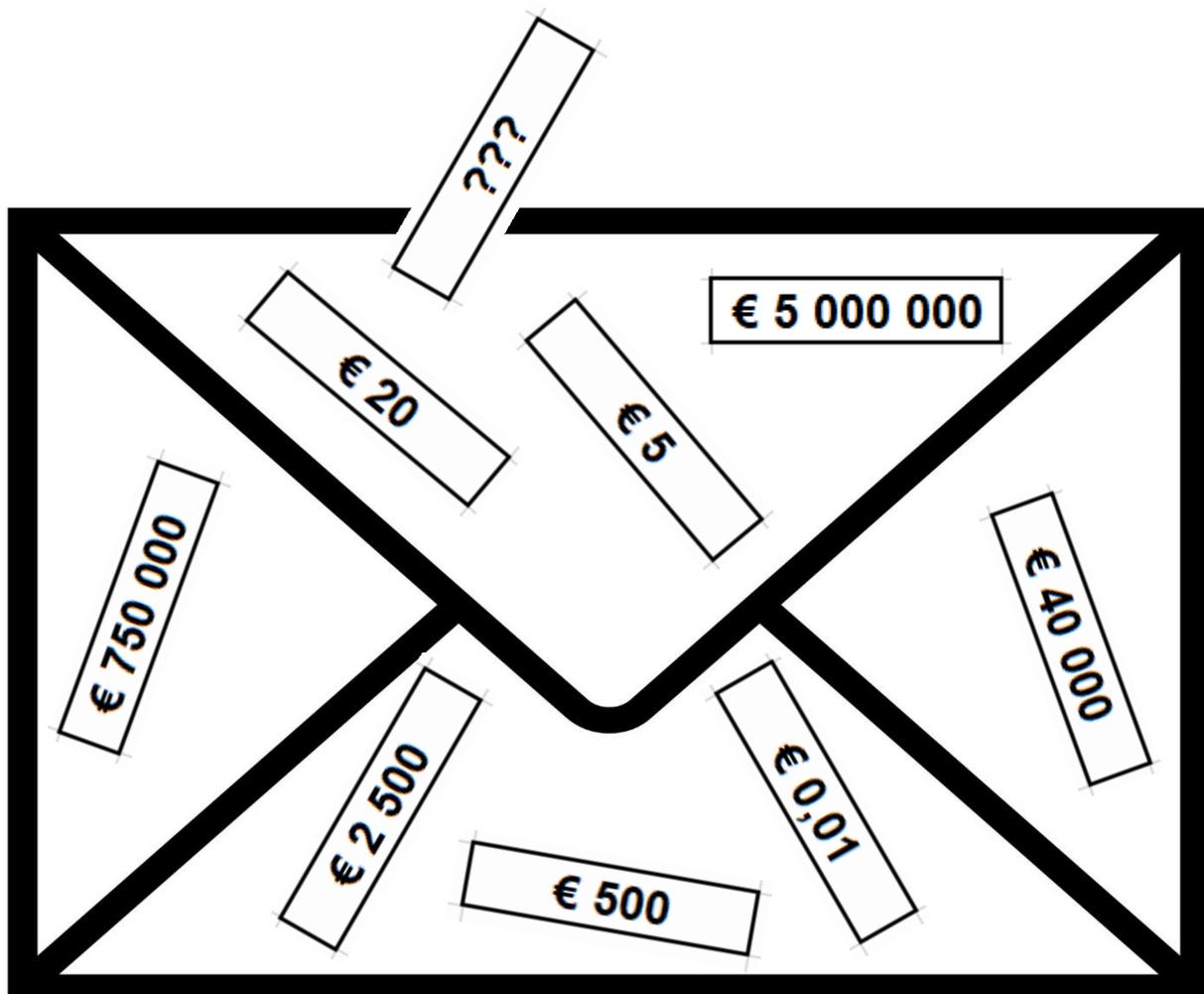


Die Qual der Wahl



**Internationales Finale der Olympiade
15./16. März 2019
Garderen, Niederlande**

Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet. Die Kommission der Olympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die Mitglieder der Kommission sind:

Marcel Daems

Gymnasium Sorghvliet, Den Haag

Eric van Dijk

Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Deutschland

Kim Kaspers

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert

Röntgen-Gymnasium, Remscheid, Deutschland

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Utrecht

Sekretariat:

Liesbeth Walther und Mariozee Wintermans

Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Olympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande
- CASIO, Amstelveen
- Texas Instruments, Utrecht
- Fontys Lehrerbildung, Tilburg

ARBEITSANWEISUNG FÜR DIE FINALAUFGABE DER MATHEMATIK-ALYMPIADE 2019

VORAB:

- Lest zunächst die gesamte Aufgabenstellung durch, damit ihr einen Überblick darüber bekommt, was an diesem Wochenende alles zu erledigen ist.
- Kontrolliert, ob ihr die Datei auf dem USB-Stick öffnen könnt.
Die folgende Datei findet ihr auf dem Stick: Aufgabenstellung *Finale Alympiade2019* (auf Niederländisch, Englisch und Deutsch) inklusive 3 Anlagen

ZEITPLANUNG:

- Behaltet die Zeit im Blick, während ihr die unterschiedlichen Teilaufgaben bearbeitet.
- Es muss ein Bericht abgegeben und eine Präsentation vorbereitet werden. Weitere Informationen zur Präsentation erhaltet ihr im Laufe des Wochenendes.
- Verteilt die Aufgaben untereinander, soweit dies möglich ist, und überlegt euch hierfür eine sinnvolle Zeiteinteilung.
- Am Samstagmittag müsst ihr vor dem Mittagessen (also spätestens um 12.30 Uhr) einen Stick mit eurer Ausarbeitung (als ein Dokument) abgeben.

ABGABE:

Samstagmittag spätestens um 12.30 Uhr: USB-Stick mit der kompletten Ausarbeitung

- Gebt eure Ausarbeitung als ein digitales Dokument ab, am besten im pdf-Format.
- Probiert auf verschiedenen Computern aus, ob euer pdf-Dokument gelesen werden kann.
- Die Mitglieder der Jury erhalten digitale Kopien der von euch abgegebenen Datei. Ihr könnt also auch mit Farben arbeiten.
- Für die Lesbarkeit eurer digitalen Ausarbeitung seid ihr selbst verantwortlich.

BEWERTUNG:

Fasst alle Untersuchungen zu einem Bericht zusammen, der ohne Kenntnis der Aufgabenstellung gut verstanden werden kann. Zentraler Bestandteil eurer Ausarbeitung ist die Bearbeitung der Abschlussaufgabe inklusive aller hierfür wichtigen Überlegungen und Argumente.

Bei der Bewertung des Berichts werden u.a. die folgenden Aspekte berücksichtigt:

- die Ausarbeitung zu den Aufgaben 1 bis 6 sowie zu den beiden Abschlussaufgaben;
- die Vollständigkeit der Bearbeitung der verschiedenen Aufgaben;
- der Gebrauch von Mathematik;
- die verwendete Argumentation und die Begründungen der getroffenen Entscheidungen;
- der Tiefgang, mit dem die unterschiedlichen Aufgaben beantwortet wurden;
- Originalität und Kreativität

Viel Spaß und viel Erfolg!!

Nach der Einführung ...

Wir haben gerade das Spiel "Die Qual der Wahl!" gespielt. Im Folgenden fassen wir nochmals die Spielregeln zusammen:

Ein Teilnehmer hat 26 geschlossene Umschläge vor sich. In den Umschlägen befinden sich Geldbeträge zwischen 1 Cent und 5 Millionen Euro. Der Kandidat wählt einen Umschlag aus, den er am Ende des Spiels öffnen und dessen Inhalt er behalten darf. Während des Spiels wird in jeder Runde eine bestimmte Zahl an Umschlägen geöffnet. Anschließend erhält der Teilnehmer ein Angebot von der Bank. Er kann sich dafür entscheiden, das Angebot anzunehmen oder weiterzuspielen. Im zweiten Fall wird erneut eine bestimmte Zahl an Umschlägen geöffnet und er erhält ein weiteres Angebot. Die detaillierten Spielregeln mit den genauen Geldbeträgen und der Anzahl der Umschläge, die in jeder Runde geöffnet werden, findet ihr in Anlage 1.

Ist das Angebot der Bank so hoch, dass der Kandidat dieses direkt in der ersten Runde annimmt, ist das Spiel für die Fernsehzuschauer uninteressant. Bietet die Bank jedoch in der ersten Runde einen niedrigen Betrag (z.B. 10 €), dann ist die Entscheidung des Spielers auch schnell getroffen. Auch dies hat für den Zuschauer keinen Unterhaltungswert. Die Kunst der Spielmacher besteht also darin, den Kandidaten vor eine schwierige Wahl zu stellen.

Vorüberlegungen

1. Formuliert Überlegungen, die bei der Entscheidung des Kandidaten, das Angebot der Bank anzunehmen oder zu verwerfen, eine Rolle spielen können.
2. Formuliert Überlegungen, die beim Festlegen des Angebots der Bank durch die Spielmacher eine Rolle spielen können.

Erkundungen

Den exakten Spielverlauf unseres Einführungsspiels findet ihr in Anlage 2.

3. Betrachtet den Spielverlauf des Einführungsspiels und untersucht den Einfluss der Geldbeträge in den geöffneten Umschlägen auf das Angebot der Bank.
4. Wie hoch schätzt ihr das nächste Angebot der Bank, wenn der Spieler noch eine Runde weiter gespielt hätte? Begründet eure Schätzung.

Im Nachhinein stellte sich heraus, dass sich ein Betrag von 500.000 € im Umschlag befand. Der Spieler hat jedoch das Angebot über 220.000 € angenommen. Man könnte also nachträglich folgern, dass die Bank dadurch 280.000 € gespart hat. Die Bank hingegen weiß natürlich nicht, welcher Betrag sich im ausgewählten Umschlag des Kandidaten befindet.

5. Begründet, warum die Spielmacher dies so wünschen. Gäbe es umgekehrt auch Gründe dafür, dass die Bank genau wissen sollte, welcher Betrag sich im ausgewählten Umschlag befindet?

Fortsetzung

6. In Anlage 3 befinden sich Spielverläufe von weiteren acht Spielen, die in dieser Form tatsächlich stattgefunden haben. Betrachtet diese Spielverläufe und untersucht, welche Aspekte beim Festlegen des Angebots der Bank eine Rolle spielen.

Erstellt mit Hilfe dieser Überlegungen ein Verfahren, mit dem die Bank in jeder Runde ein Angebot bestimmen soll. Durch dieses Verfahren sollen die tatsächlichen Spielverläufe möglichst gut beschrieben werden.

Forderungen an das Verfahren:

- Das Verfahren zur Festlegung des Angebots durch die Bank muss auf ein neues Spiel übertragbar sein.
- Mit dem Verfahren muss in kurzer Zeit ein Angebot ermittelt werden können.
- Bei gleichen Spielsituationen muss das Verfahren auch ähnliche Angebote erzeugen.

Am Freitagabend kommt die Kommission zu euch ins Haus und spielt mit euch das Spiel, um euer Verfahren zu testen. Vielleicht habt ihr anschließend noch Ideen zur Verbesserung eures Verfahrens ...

Abschlussaufgaben

Abschlussaufgabe A

Bisher habt ihr probiert, das Angebot der Bank möglichst gut an die tatsächlichen Spielverläufe anzupassen. Vielleicht kann man sich aber auch andere Verfahren vorstellen, die z.B. billigere, spannendere oder in irgendeiner Form interessantere Spielverläufe zur Folge haben.

Entwickelt ein solches Verfahren. Begründet dabei alle Entscheidungen, die ihr getroffen habt.

Abschlussaufgabe B

Am Samstagmorgen bekommt ihr einen neuen Spielverlauf von der Kommission (s. Anlage 4). Die ersten sechs Runden sind schon gespielt und der Teilnehmer hat das letzte Angebot der Bank abgelehnt. In den folgenden Runden wird jeweils nur noch ein Umschlag geöffnet, jeweils gefolgt von einem neuen Angebot. Jetzt bleibt nur noch eine begrenzte Zahl an möglichen Spielverläufen übrig.

Bestimmt mit eurem Verfahren aus Aufgabe 6, welche Spielverläufe noch möglich sind und begründet, welche dieser Möglichkeiten aus eurer Sicht am wahrscheinlichsten sind.

Präsentation

Ihr spielt nun die Rolle der Bank in einer Show mit dem Publikum. Es werden einige Runden gespielt, wobei ihr euch merken müsst, was genau geschieht. An einer oder an mehreren Stellen werdet ihr aufgefordert, ein Angebot zu bestimmen. Das Publikum kann dann auswählen, ob das Angebot angenommen wird oder nicht.

Anlage 1

Die Spielregeln

Der Kandidat darf aus 26 versiegelten Umschlägen einen auswählen. In den 26 Umschlägen befinden sich die folgenden Beträge:

| | | | |
|--------|---------|-----------|-------------|
| € 0,01 | € 50 | € 10 000 | € 500 000 |
| € 0,20 | € 100 | € 20 000 | € 750 000 |
| € 0,50 | € 500 | € 30 000 | € 1 000 000 |
| € 1 | € 1 000 | € 40 000 | € 2 000 000 |
| € 5 | € 2 500 | € 50 000 | € 2 500 000 |
| € 10 | € 5 000 | € 100 000 | € 5 000 000 |
| € 20 | | € 250 000 | |

Der vom Spieler ausgewählte Umschlag bleibt verschlossen und wird erst am Ende des Spiels geöffnet. Niemand (auch nicht die Bank) weiß, welcher Betrag sich in diesem Umschlag befindet. Anschließend wählt der Kandidat in jeder Runde einige Umschläge aus. Diese werden geöffnet, so dass der Kandidat sehen kann, welche Beträge anschließend nicht mehr im Spiel sind. In der folgenden Tabelle ist die Anzahl der Umschläge angegeben, die pro Runde geöffnet werden:

| Runde | Anzahl zu öffnender Umschläge | Anzahl übriger Umschläge (inkl. des eigenen Umschlags) |
|-------|-------------------------------|--|
| 1 | 6 | 20 |
| 2 | 5 | 15 |
| 3 | 4 | 11 |
| 4 | 3 | 8 |
| 5 | 2 | 6 |
| 6 | 1 | 5 |
| 7 | 1 | 4 |
| 8 | 1 | 3 |
| 9 | 1 | 2 |

Auf einer Übersichtstafel wird jeweils angegeben, welche Beträge noch im Spiel sind und dadurch mögliche Optionen für den Betrag im Umschlag des Kandidaten sind. Der Kandidat erhält nach jeder Runde (nachdem die Umschläge geöffnet wurden) ein Angebot der Bank über einen bestimmten Geldbetrag, gegen den er seinen Umschlag eintauschen kann.

Der Spieler muss also abwägen: Nimmt er das Angebot der Bank an und verkauft seinen Umschlag? Oder wartet er, bis noch mehr Umschläge geöffnet werden und er besser abschätzen kann, welcher Betrag sich in seinem Umschlag befindet? Nimmt der Kandidat in Runde 9 das Angebot der Bank nicht an, so öffnet er seinen eigenen Umschlag und erhält den dort angegebenen Geldbetrag.

Anlage 2

Spielverlauf aus dem Einführungsspiel

In Runde 1 geöffnete Umschläge:

€ 10

€ 500

€ 10 000

€ 20 000

€ 50 000

€ 5 000 000

Angebot der Bank: € 36 000

In Runde 2 geöffnete Umschläge:

€ 0,20

€ 1

€ 30 000

€ 250 000

€ 750 000

Angebot der Bank: € 63 000

In Runde 3 geöffnete Umschläge:

€ 0,01

€ 5

€ 20

€ 50

Angebot der Bank: € 143 000

In Runde 4 geöffnete Umschläge:

€ 0,50

€ 40 000

€ 2 500 000

Angebot der Bank: € 167 000

In Runde 5 geöffnete Umschläge:

€ 5 000

€ 2 000 000

Angebot der Bank: € 147 000

In Runde 6 geöffneter Umschlag:

€ 100

Angebot der Bank: € 220 000

Angebot angenommen

Betrag im eigenen Umschlag: € 500 000

Anlage 3

| Spiel 2 | Spiel 3 |
|---|---|
| <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 1 € 5 € 1 000 € 10 000 € 1 000 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 22 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 50 € 500 € 30 000 € 250 000 € 2 000 000 Angebot der Bank: € 50 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 10 € 100 € 5 000 € 750 000 Angebot der Bank: € 85 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 0,20 € 2 500 € 40 000 Angebot der Bank: € 145 000</p> <p>In Runde 5 geöffnete Umschläge: € 0,50 € 50 000 Angebot der Bank: € 290 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 2 500 000</p> | <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 50 € 5 000 € 50 000 € 250 000 € 750 000 € 1 000 000 Angebot der Bank: € 38 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 0,01 € 0,50 € 5 € 1 000 € 40 000 Angebot der Bank: € 103 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 1 € 20 € 20 000 € 2 500 000 Angebot der Bank: € 195 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 0,20 € 100 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 190 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 2 500</p> |

| Spiel 4 | Spiel 5 |
|---|---|
| <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 0,50 € 100 € 1000 € 50 000 € 100 000 € 500 000 Angebot der Bank: € 43 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 0,01 € 1 € 500 € 40 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 71 500</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 50 € 5 000 € 30 000 € 250 000 Angebot der Bank: € 162 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 20 € 1 000 000 € 2 500 000 Angebot der Bank: € 139 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 2 000 000</p> | <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 0,20 € 0,50 € 20 € 10 000 € 100 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 24 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 5 € 40 000 € 750 000 € 1 000 000 € 2 000 000 Angebot der Bank: € 29 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 50 € 30 000 € 250 000 € 2 500 000 Angebot der Bank: € 18 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 10 € 1 000 € 50 000 Angebot der Bank: € 32 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 100</p> |

| Spiel 6 | Spiel 7 |
|---|--|
| <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 0,50 € 10 € 20 € 1 000 € 5 000 € 100 000 Angebot der Bank: € 75 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 10 000 € 30 000 € 40 000 € 500 000 € 750 000 Angebot der Bank: € 145 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 0,01 € 50 € 100 € 50 000 Angebot der Bank: € 335 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 1 € 20 000 € 1 000 000 Angebot der Bank: € 575 000</p> <p>In Runde 5 geöffnete Umschläge: € 250 000 € 2 000 000 Angebot der Bank: € 710 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 2 500 000</p> | <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 0,50 € 500 € 5 000 € 50 000 € 250 000 € 2 500 000 Angebot der Bank: € 38 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 1 € 5 € 10 € 20 000 € 750 000 Angebot der Bank: € 101 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 20 € 2 500 € 100 000 € 2 000 000 Angebot der Bank: € 157 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 100 € 30 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 88 000</p> <p>In Runde 5 geöffnete Umschläge: € 0,01 € 50 Angebot der Bank: € 162 000</p> <p>In Runde 6 geöffneter Umschlag: € 1 000 000 Angebot der Bank: € 85 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 1 000</p> |

| Spiel 8 | Spiel 9 |
|---|---|
| <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 0,01 € 50 € 5 000 € 40 000 € 750 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 23 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 1 € 500 € 1 000 € 30 000 € 50 000 Angebot der Bank: € 58 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 5 € 10 € 100 € 100 000 Angebot der Bank: € 150 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 20 € 2 500 € 500 000 Angebot der Bank: € 261 000</p> <p>In Runde 5 geöffnete Umschläge: € 0,50 € 2 500 000 Angebot der Bank: € 261 000</p> <p>In Runde 6 geöffneter Umschlag: € 10 000 Angebot der Bank: € 377 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 0,20</p> | <p>In Runde 1 geöffnete Umschläge: € 1 € 10 € 5 000 € 30 000 € 2 500 000 € 5 000 000 Angebot der Bank: € 17 000</p> <p>In Runde 2 geöffnete Umschläge: € 0,20 € 0,50 € 5 € 500 € 10 000 Angebot der Bank: € 50 000</p> <p>In Runde 3 geöffnete Umschläge: € 20 € 2 500 € 100 000 € 750 000 Angebot der Bank: € 91 000</p> <p>In Runde 4 geöffnete Umschläge: € 50 € 100 € 250 000 Angebot der Bank: € 173 000 Angebot angenommen</p> <p>Betrag im eigenen Umschlag: € 50 000</p> |

Anlage 4

Spielverlauf Samstagmorgen (Fake-Spiel):

In Runde 1 geöffnete Umschläge:

€ 1 000 000
€ 5
€ 5 000
€ 0,20
€ 500 000
€ 1 000

In Runde 2 geöffnete Umschläge:

€ 20 000
€ 100 000
€ 40 000
€ 2 500 000
€ 0,50

In Runde 3 geöffnete Umschläge:

€ 5 000 000
€ 50
€ 2 500
€ 0,01

In Runde 4 geöffnete Umschläge:

€ 1
€ 10
€ 750 000

In Runde 5 geöffnete Umschläge:

€ 2 000 000
€ 20

In Runde 6 geöffnete Umschläge:

€ 30 000