

SPEXXX



Internationales Finale der Olympiade

17./18. März 2023

Garderen, Niederlande

IMPRESSUM

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet. Die Kommission der Olympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die Mitglieder der Kommission sind:

Marcel Daems

Gymnasium Sorghvliet, Den Haag

Eric van Dijk

Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Deutschland

Kim Kaspers

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert

Bezirksregierung Köln, Deutschland

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Utrecht

Sekretariat:

Mariozee Wintermans

Freudenthal Instituut, Utrecht

Ein besonderer Dank geht an:

Ruben Dijkstra & Ruurd Lammers
(Waterfall Games)



Die Olympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande
- CASIO, Amstelveen

ARBEITSANWEISUNG FÜR DIE FINALAUFGABE DER MATHEMATIK-ALYMPIADE 2023

VORAB:

- Lest zunächst die gesamte Aufgabenstellung durch, damit ihr einen Überblick darüber bekommt, was an diesem Wochenende alles zu erledigen ist.
- Verteilt die Aufgaben untereinander, soweit dies möglich ist.

ZEITPLANUNG:

- Behaltet die Zeit im Blick, während ihr die unterschiedlichen Teilaufgaben bearbeitet.
- Es muss ein Bericht abgegeben und eine Präsentation vorbereitet werden. Weitere Informationen zur Präsentation erhaltet ihr im Laufe des Wochenendes.
- Überlegt euch gut, wer wann welche Aufgabe übernimmt.
- Am Samstagmittag müsst ihr vor dem Mittagessen (also spätestens um 12.30 Uhr) einen Stick mit eurer Ausarbeitung abgeben.

ABGABE:

Samstagmittag spätestens um 12.30 Uhr: USB-Stick mit der kompletten Ausarbeitung

- Gebt eure Ausarbeitung als ein digitales Dokument ab, am besten im pdf-Format.
- Probiert auf verschiedenen Computern aus, ob euer pdf-Dokument gelesen werden kann.
- Die Mitglieder der Jury erhalten digitale Kopien der von euch abgegebenen Datei. Ihr könnt also auch mit Farben arbeiten.
- Für die Lesbarkeit eurer digitalen Ausarbeitung seid ihr selbst verantwortlich.

BEWERTUNG:

Fasst alle Untersuchungen zu einem Bericht zusammen, der ohne Kenntnis der Aufgabenstellung gut zu verstehen ist. Zentraler Bestandteil eurer Ausarbeitung ist die Bearbeitung der Abschlussaufgabe inklusive aller hierfür wichtigen Überlegungen und Argumente.

Bei der Bewertung des Berichts werden u.a. die folgenden Aspekte berücksichtigt:

- die Ausarbeitung zu den Aufgaben 1 bis 3 sowie zur Abschlussaufgabe;
- die Vollständigkeit der Bearbeitung der verschiedenen Aufgaben;
- der Gebrauch von Mathematik;
- die verwendete Argumentation und die Begründung der getroffenen Entscheidungen;
- der Tiefgang, mit dem die unterschiedlichen Aufgaben beantwortet wurden;
- die Darstellung der Ergebnisse: äußere Form, Zusammenhang, Lesbarkeit, Abbildungen, usw.
- Originalität und Kreativität

Viel Spaß und viel Erfolg!!

EINLEITUNG

In dieser Finalaufgabe der Alympiade geht es um das Spiel Spexxx. Hierbei handelt es sich um ein Strategiespiel mit Würfeln. Ihr werdet selbst dieses Spiel einige Male spielen, um die Spielregeln zu verstehen und mögliche Strategien auszuprobieren. Selbstverständlich werdet ihr auch (Wahrscheinlichkeits-)Rechnungen durchführen und mathematisch argumentieren sowie euch kritisch mit der Punktezahl auseinandersetzen. Und am Ende entwerft ihr selbst ein Punkteschema und ggf. auch neue Spielregeln für eine vereinfachte Version dieses Spiels.

Eine Erklärung des Spiels befindet sich u.a. auf YouTube

NL: https://www.youtube.com/watch?v=7I_wGd7okjw

EN: <https://www.yucata.de/en/Rules/Spexxx>

und hier findet ihr die Spielregeln auch auf Deutsch:

<https://www.yucata.de/de/Rules/Spexxx#:~:text=Ziel%20des%20Spieles%20ist%20es,gesetzt%20wurden%2C%20hast%20du%20gewonnen>

WÜRFELN

Die Wahrscheinlichkeit, dass man z.B. einen Spielstein auf ein rotes Feld setzen kann, ist sehr schwer zu berechnen. Man kann diese Wahrscheinlichkeit aber empirisch näherungsweise bestimmen, indem man häufig genug würfelt.

Aus diesem Grund wird nun jedes Team „Daten generieren“. Im Umschlag findet ihr Anweisungen darüber, was ihr würfeln und welche Strategie ihr dabei verfolgen sollt. Gebt anschließend eure Ergebnisse bei der Kommission ab.

SPEXXX

Die einzige Möglichkeit, um das Spiel mathematisch in den Griff zu bekommen, besteht darin, es einige Male zu spielen. In dieser Aufgabe betrachten wir allerdings nur die Spielvariante für zwei Personen. Spielt das Spiel daher jeweils zu zweit und überlegt dabei laut, welche Überlegungen ihr anstellt.

AUFGABE 1: (WAHRSCHEINLICHKEITS-)RECHNUNG BEI SPEXXX

Beim Spielen von Spexxx wirft man immer mit fünf Würfeln. Dieses Werfen von fünf Würfeln führt zu zahlreichen stochastischen Fragestellungen.

- a) Berechnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man direkt in einem Wurf fünfmal dieselbe Augenzahl wirft.

Du möchtest ein Spielstein auf eine lila Zelle des Spielbretts setzen. Nach drei Würfeln hast du schon drei 5-en zur Seite gelegt, und du darfst noch zweimal würfeln. Im vierten Wurf würfelst du eine 1 und eine 3.

- b) Was ist jetzt schlauer: Die **1** liegen zu lassen und zu probieren, im nächsten Wurf noch eine **1** zu werfen, oder beide Würfel noch einmal zu werfen?

Um deinen Gegner zu ärgern, möchtest du einen Stein auf die blaue Zelle **4, 4, 4, 1** setzen. Leider läuft es in den ersten Würfeln nicht so wie gehofft, aber im 4. Wurf liegt auf einmal diese Augenzahlkombination auf dem Tisch: **1, 3, 4, 4, 6**.

- c) Welche Würfel lässt du liegen und welche wirfst du erneut im fünften Wurf? Und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass du dein Ziel erreichst?

Ed behauptet Folgendes: „Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man Silber würfelt (fünf aufeinanderfolgende Augenzahlen) ist eigentlich doch kleiner als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man Gold würfelt (fünfmal dieselbe Augenzahl): Es gibt für Silber nur zwei Möglichkeiten, nämlich **1, 2, 3, 4, 5** und **2, 3, 4, 5, 6**. Für Gold hingegen gibt es sechs verschiedene Möglichkeiten.“

- d) Untersucht, ob Ed recht hat, und begründet eure Antwort.

AUFGABE 2: STRATEGISCH SPIELSTEINE PLATZIEREN



Angenommen, du setzt den ersten Spielstein auf die lila Zelle, so wie in der Abbildung oben dargestellt.

- a) Auf wie viele verschiedene Zellen kann man den nächsten Spielstein setzen, so dass man im dritten Durchgang Punkte erhält (also drei Steine in einer Reihe hat)? Es gibt in diesem Beispiel keinen Gegner.
- b) Schätzt die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass dies tatsächlich in der dritten Spielrunde (ohne Gegner) gelingt.

Spexxx ist auch ohne zu würfeln ein spannendes Spiel. In dieser Aufgabe wird mit zwei Spielern gespielt und jeder erhält zu Beginn 12 Spielsteine. Abwechselnd setzt nun jeder einen Spielstein auf das Spielfeld und ermittelt seine Punktzahl.

- c) Wie groß ist die maximale Punktzahl, die man mit 12 Spielsteinen erreichen kann, wenn man nicht durch einen Gegner daran gehindert wird?

Man kann natürlich auch zusammenarbeiten, um gemeinsam möglichst viele Punkte zu erzielen.

- d) Ermittelt die höchstmögliche Punktzahl, die man gemeinsam mit einem Gegenspieler erzielen kann.

Bei jeder Runde steht man vor einem Dilemma: Möchte man selbst Punkte machen oder blockiert man lieber seinen Gegner? Gibt es dabei immer eine bessere Strategie?

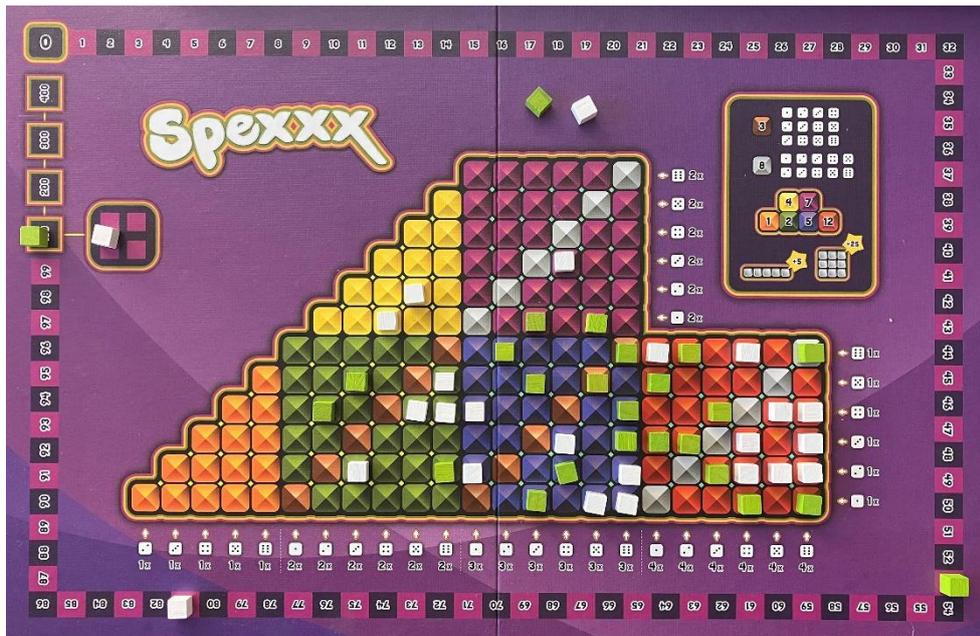
- e) Untersucht, ob es eine solche ideale Gewinnstrategie gibt, und erläutert eure Überlegungen bei der Suche nach der Strategie sowie die Strategie selbst ausführlich.

AUFGABE 3: SPIELSITUATIONEN



Ruurd (weiß) und Ruben (grün) spielen dieses Spiel sehr oft. Bei einem ihrer Spiele sah das Spielfeld kurz vor Ende des Spiels so aus wie in der Abbildung oben. Ruben hat noch einen Spielstein übrig, den er setzen kann.

- a) Stimmt der Spielstand bis jetzt?
 b) Schätzt begründet die Wahrscheinlichkeit ab, dass Ruben (grün) gewinnen wird. Betrachtet dabei verschiedene Möglichkeiten.



Hier seht ihr eine weitere Spielsituation kurz vor Ende des Spiels. Ruurd (weiß) und Ruben (grün) haben beide noch einen Spielstein übrig. Ruben ist an der Reihe. Ruurd scheint schon geschlagen zu sein, aber der Schein trügt.

- c) Was würdet ihr Ruben (grün) empfehlen: Sollte er versuchen, Ruurd zu blockieren oder lieber selbst Punkte zu erzielen?
Begründet eure Empfehlung.

AUFGABE 4: BEPUNKTUNG

Das vollständige Punkteschema von Spexxx steht im Feld rechts oben auf dem Spielbrett. Analysiert dieses Punkteschema, wobei ihr die folgenden Aspekte beachten sollt und alle Aussagen mit möglichst vielen mathematischen Argumenten belegt:

- Ist die Bepunktung „ehrlich“? (Und was bedeutet eigentlich „ehrliche“ Bepunktung?)
- Welche Aussagen könnt ihr über die Daten machen, die die Teams gemeinsam generiert haben und die ihr inzwischen erhalten habt?
- Entwerft ein alternatives Punkteschema für das Spiel.

ABSCHLUSSAUFGABE UND PRÄSENTATION

Man kann Spexxx auch mit einem verkleinerten Spielfeld spielen: Das lila Feld und das rote Feld gehören dann nicht dazu, und anstelle von viermal mit fünf Würfeln zu werfen, wirft man dreimal mit vier Würfeln.

Entwerft eine passende Punkteverteilung für dieses alternative Spiel. Verwendet eure Ergebnisse aus Aufgabe 4 und passt gegebenenfalls die Spielregeln und/oder das Spielbrett an.

Begründet euer neues Punkteschema und verwendet dabei auch eure Erfahrungen, die ihr beim Spielen damit macht.

Vielleicht wird bei der Abschlusspräsentation auch eure Version des Spiels gespielt ...



Aufträge in den Umschlägen am Freitagmorgen:

Gold

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr fünfmal dieselbe Augenzahl

Strategie: Legt nach dem ersten Wurf immer die Würfel zur Seite, die die am meisten vorkommende Augenzahl zeigen, und spielt damit weiter. Wenn es keine Augenzahl gibt, die zwei- oder mehrmals vorkommt, dann würfelt alle fünf Würfel nochmal.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln fünf gleiche Augenzahlen gewürfelt habt.

Silber

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr fünf aufeinanderfolgende Augenzahlen (große Straße)

Strategie: Lasst die **1** und die **6** so lange wie möglich liegen, um die Reihe nicht direkt festzulegen

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln fünf aufeinanderfolgende Augenzahlen gewürfelt habt.

Bronze

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr vier aufeinanderfolgende Augenzahlen (kleine Straße)

Strategie: die **3** und die **4** sind Bestandteil aller drei Möglichkeiten - legt daher dies als erstes zur Seite.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln vier aufeinanderfolgende Augenzahlen gewürfelt habt.

Rot

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr viermal dieselbe Augenzahl

Strategie: Legt nach dem ersten Wurf immer die Würfel zur Seite, die die am meisten vorkommende Augenzahl zeigen, und spielt damit weiter. Wenn es keine Augenzahl gibt, die zwei- oder mehrmals vorkommt, dann würfelt alle fünf Würfel nochmal.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln vier gleiche Augenzahlen gewürfelt habt.

Lila

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr dreimal und zweimal dieselbe Augenzahl (Full House)

Strategie: Legt nach dem ersten Wurf die am meisten vorkommenden Augenzahlen zur Seite und spielt damit weiter. Wenn es keine Augenzahl gibt, die zwei- oder dreimal vorkommt, dann würfelt alle fünf Würfel nochmal.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln dreimal und zweimal dieselbe Augenzahlen (Full House) gewürfelt habt.

Blau

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr dreimal dieselbe Augenzahl

Strategie: Legt nach dem ersten Wurf immer die Würfel zur Seite, die die am meisten vorkommende Augenzahl zeigen, und spielt damit weiter. Wenn es keine Augenzahl gibt, die zwei- oder mehrmals vorkommt, dann würfelt alle fünf Würfel nochmal.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln drei gleiche Augenzahlen gewürfelt habt.

Grün

Ziel: nach viermal Würfeln habt ihr zweimal dieselbe Augenzahl

Strategie: Wenn es keine Augenzahl gibt, die zwei- oder mehrmals vorkommt, dann würfelt alle fünf Würfel nochmal.

Führt das Verfahren 50mal bis zum Ende durch und notiert, wie oft ihr nach vier Würfeln zwei gleiche Augenzahlen gewürfelt habt.