

Zwei gegen Hundert



Aufgabe der Vorrunde für die 17-te Mathematik A-lympiade

25. November 2005

A-lympiade 2005: Hinweise für die Teams

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Sie beteiligen sich heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von Ihnen verlangt. Dieser Tatsache gebührt schon vorab eine ausdrückliche Anerkennung.

Die folgenden Hinweise sollten Sie unbedingt beachten:

Die Aufgabe besteht aus 3 Teilaufgaben als Voruntersuchung und einer Hauptaufgabe.

- Lesen Sie den Aufgabentext gründlich. Klären Sie, worin die eigentliche Aufgabe besteht, und verteilen Sie die Arbeit im Team sinnvoll.
- Für die Bearbeitung der Aufgabe haben Sie 7 Stunden Zeit. Planen Sie genügend Zeit für den Abschlussauftrag ein. Auch das Aufschreiben der Lösung kostet viel Zeit.
- Bevor Sie mit der Arbeit am Abschlussauftrag beginnen, stellen Sie einander ihre Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor.
- Die Antworten zu den Voruntersuchungen gehören nicht in die Spielbeschreibung des Abschlussauftrages. Diese Resultate werden als Anhang an die Arbeit angefügt. In der Spielbeschreibung kann dann ggf. auf sie verwiesen werden.
- Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgabe Bücher und einen Computer benutzen.

Dies müssen Sie abgeben:

- Eine vollständige Beschreibung des neuen Spiels
- Ausführliche Beschreibungen zu zwei möglichen Spielverläufen – diese müssen, unabhängig von anderen Teilen der Arbeit, gut lesbar und verständlich sein.
- Als Anlage: Die Ergebnisse zu den Aufgaben der Voruntersuchungen.

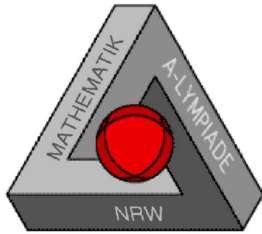
Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten Kopien Ihrer Arbeit. Damit die Kopien gut lesbar sind, halten Sie Ihre Arbeit bitte durchweg im A4-Format, drucken Sie in schwarzweiß und benutzen Sie nur schwarz schreibende Stifte (keinen Bleistift!). Erstellen Sie im Zweifelsfall eine Probekopie. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu unterstützen, erwähnen Sie bitte den Namen Ihrer Schule in Ihrer Arbeit nicht.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit der Spielbeschreibung und der ausgeführten Beispiele
- Vollständigkeit der Arbeit
- sinnvoller, richtiger und geschickter Gebrauch von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (hierbei kann der Realitätsbezug von Bedeutung sein)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe wünscht Ihnen

Matthias Lippert.



Mathematik A-lympiade: Vorrunde 2005-2006

Zwei gegen Hundert

Fast wöchentlich wird auf einem der vielen niederländischen Fernsehkanäle die Quizsendung „Einer gegen Hundert“ ausgestrahlt. Bei diesem spannenden Frage- und Antwortspiel nimmt ein Kandidat es mit hundert Gegenspielern auf. Die Gegenspieler sitzen auf der Tribüne und bilden gleichzeitig das Publikum. Der Kandidat und die Gegenspieler beantworten die Fragen des Moderators. Wer eine Frage falsch beantwortet, scheidet aus dem Spiel aus. Das Spiel ist also entweder zu Ende, wenn der Kandidat eine falsche Antwort gibt, oder wenn alle in der Fragerunde verbliebenen Gegenspieler falsch geantwortet haben.



Für jeden ausgeschiedenen Gegenspieler geht ein Geldbetrag in einen Spartopf. Dazu wird zu Beginn jeder Frage der „Wert eines Gegenspielers“ festgelegt, indem 50 000 € auf die im Spiel verbliebenen Gegenspieler gleichmäßig verteilt und auf ganze Euro abgerundet werden. Sind zu Beginn einer Fragerunde beispielsweise noch achtzig Gegenspieler im Spiel, so beträgt der Wert eines Gegenspielers 625 €. Scheiden in dieser Runde zwölf Kandidaten aus, so wandern $12 \cdot 625 \text{ €} = 7500 \text{ €}$ in den Spartopf. Gelingt es dem Kandidaten im Spiel zu bleiben, bis alle Gegenspieler ausgeschieden sind, so gewinnt er den gesamten Betrag aus dem Spartopf und kann sehr reich nach Hause gehen.

Obwohl „Einer gegen Hundert“ ein beliebtes Fernsehquiz ist, erwägt die Direktion des Fernsehsenders, den Spielablauf zu verändern. Es geht darum, mehr Spannung in das Quiz zu bringen. Die Direktion wünscht ein neues Spielkonzept, bei dem es nicht ein sondern zwei Kandidaten mit dem Publikum aufnehmen. Es soll bei einem Betrag von 50 000 € bleiben, der pro Fragerunde in den Spartopf wandern kann, aber die übrigen Regeln dürfen verändert oder angepasst werden.

Euer Auftrag besteht darin, dieses neue Konzept zu entwerfen und auszuarbeiten. Beispiele von Spielverläufen sollen die überzeugende Wirkung des neuen Konzepts verdeutlichen.

In den Einstiegsaufgaben 1 bis 3 untersucht ihr die Regeln, den Spielverlauf und die Gewinnmöglichkeiten von „Einer gegen Hundert“ wie es zur Zeit gesendet wird. Im Abschlussauftrag konzipiert ihr das neue Spiel.

Voruntersuchung

wichtige Information:

Im Spiel „Einer gegen Hundert“ können die Joker „Überschlagen“ und „Verdoppeln“ eingesetzt werden. Die Funktion dieser Joker wird in den folgenden Aufgaben erklärt.

- In Aufgabe 1 lassen wir die Joker außer Betracht.
- In Aufgabe 2 wird ausschließlich der Einsatz des Jokers „Überschlagen“ untersucht, der Joker „Verdoppeln“ ist hier nicht einsetzbar.

- In Aufgabe 3 werden beide Joker – „Überschlagen“ und „Verdoppeln“ – eingesetzt.

Im echten TV-Quiz dürfen die Kandidaten darüber hinaus vor jeder Fragerunde entscheiden, ob eine leichte oder eine schwierige Frage gestellt werden soll. Diese Möglichkeit wollen wir bei unseren Betrachtungen nicht berücksichtigen.

Aufgabe 1

Um die möglichen Spielverläufe besser kennen zu lernen, gehen wir zunächst von einem allwissenden Kandidaten aus, der auf jede im Spiel gestellte Frage die richtige Antwort weiß. Darüber hinaus wird genauso gespielt wie oben beschrieben, d. h. ohne die Joker „Überschlagen“ und „Verdoppeln“. Der Geldbetrag, den ein solcher allwissender Kandidat gewinnen kann, hängt davon ab, wie viele Kandidaten pro Runde aus dem Spiel ausscheiden. Scheiden bereits in der ersten Fragerunde alle Gegenspieler aus, so gewinnt der Kandidat 50 000 € . Der Gewinn kann aber bei mehr Fragerunden enorm höher liegen. Wie hoch der Gewinn werden kann, hängt davon ab, wie viele Gegenspieler in jeder Fragerunde ausscheiden. Beispiele:

- Die Gegenspieler scheiden einer nach dem anderen aus.
 - In jeder Fragerunde scheidet die Hälfte der verbliebenen Kandidaten aus.
 - Es scheiden zunächst ein, dann zwei, dann vier, dann acht usw. Gegenspieler aus.
- a) Berechnet für jeden der oben beschriebenen Spielverläufe den Gewinn des Kandidaten.
 - b) Überlegt euch auch zwei weitere Spielverläufe, beschreibt sie und berechnet den zugehörigen Gewinn des Kandidaten.
 - c) Formuliert eine Behauptung über die Höhe des maximalen Gewinnbetrages sowie die zugehörigen Spielverläufe und begründet eure Behauptung.

Aufgabe 2

Im Spiel „Einer gegen Hundert“ weiß der Kandidat im allgemeinen nicht auf jede Frage eine Antwort. Um dem Kandidaten hier ein wenig entgegen zu kommen, darf dieser drei Mal den Joker „Überschlagen“ einsetzen. Der Einsatz dieses Jokers kostet einiges des bis dahin im Spartopf angesammelten Geldes. Beim Einsatz des Jokers „Überschlagen“ scheiden zwar die Gegenspieler, die eine falsche Antwort gegeben haben, aus, aber der Kandidat bekommt für diese ausgeschiedenen Gegenspieler kein Geld in seinen Spartopf. Darüber hinaus kostet der erste Einsatz des Jokers 25% des bis dahin angesparten Geldes im Spartopf, der zweite Einsatz 50% und der dritte Einsatz 75% des jeweils bis dahin angesparten Geldes im Spartopf. Da der Joker „Überschlagen“ nur gegen „Bezahlung“ eingesetzt werden kann, darf er erst benutzt werden, wenn in einer vorangegangenen Fragerunde bereits Gegenspieler ausgeschieden sind.

- a) Beschreibt einen Spielverlauf, in dem der Kandidat
 - alle Joker „Überschlagen“ eingesetzt hat,
 - alle verbliebenen Fragen richtig beantwortet hat und
 - den unter diesen Bedingungen kleinstmöglichen Gewinn erzielt hat.

Begründet, weshalb bei dem von euch beschriebenen Spielverlauf der kleinstmögliche Gewinn erzielt wird.

- b) Beschreibt einen Spielverlauf, in dem der Kandidat
- alle Joker „Überschlagen“ eingesetzt hat,
 - alle verbliebenen Fragen richtig beantwortet hat, und
 - den unter diesen Bedingungen größtmöglichen Gewinn erzielt hat.

Begründet, weshalb bei dem von euch beschriebenen Spielverlauf der größtmögliche Gewinn erzielt wird.

Aufgabe 3

Manchmal ist man als Kandidat ganz sicher, die richtige Antwort zu kennen. Man hat für einen solchen Fall im ganzen Spiel genau einmal die Möglichkeit, den Joker „Verdoppeln“ einzusetzen. Möchte man diese Möglichkeit nutzen, dann gibt man es bekannt, bevor man die Frage beantwortet. Für jeden Gegenspieler, der in dieser Runde ausscheidet, erhält man dann den doppelten Betrag des eigentlichen „Wertes des Gegenspielers“.

- a) Bestimmt die günstigste Situation für den Einsatz des Jokers „Verdoppeln“. Was ist in diesem Fall der größtmögliche Gewinn?
Achtung: In diesem Aufgabenteil soll der Joker „Überschlagen“ nicht eingesetzt werden.
- b) Beschreibt einen Spielverlauf mit maximalem Gewinn, wenn außer dem Joker „Verdoppeln“ auch alle drei Joker „Überschlagen“ verpflichtend eingesetzt werden müssen.



Was wurde Frau van den Hoek-Kok 1903 als erste Frau in den Niederlanden?
(A) Rechtsanwältin, (B) Pilotin, (C) Köchin

Abschlussauftrag

Die Direktion des Fernsehsenders ist nicht mehr zufrieden mit der Quizsendung. An euer Team ergeht der Auftrag, eine neue Spielvariante zu konzipieren. Teile des bisherigen Konzepts hält die Direktion weiterhin für tragfähig, insgesamt soll das Quiz aber noch spannender werden. Die Idee der Gegenspieler im Publikum, die bei falschen Antworten ausscheiden, muss auf jeden Fall im neuen Konzept beibehalten werden, genauso wie der feste Betrag von 50 000 € pro Frage, wie es auch im Spiel „Einer gegen Hundert“ der Fall ist. Allerdings, nur ein Kandidat ... das kann verbessert werden! Die Direktion wünscht für ihr Programm ein Spiel mit **zwei** Kandidaten, die in Fragerunden erreichen, dass ihre Gegenspieler aus dem Spiel ausscheiden. Die übrigen Regeln müssen geändert und es müssen Regeln hinzugefügt oder weggelassen werden, wie es euren eigenen kreativen Ideen entspricht.

Ihr habt nun die Aufgabe diese neue Spielvariante vollständig zu beschreiben. Selbstverständlich solltet ihr eure Ausarbeitung durch einige Beispiele, wie das Spiel verlaufen und wie viel der Kandidat gewinnen kann, illustrieren. Diese Beschreibung mitsamt den ausgearbeiteten Beispielen muss in übersichtlicher und klarer Weise zu Papier gebracht und in dieser Form der Direktion des Fernsehsenders präsentiert werden.