

Gut und günstig Parken



Aufgabe der Vorrunde für die 22-te Mathematik A-lympiade

19. November 2010

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe



Die Mathematikwettbewerbe MACHT MATHE in NRW werden vom Ministerium für Schule und Weiterbildung in Zusammenarbeit mit dem Freudenthal-Institut Utrecht ausgerichtet mit freundlicher Unterstützung durch den Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW und die Universität zu Köln.

Hinweise für die Teams

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Sie beteiligen sich heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von Ihnen verlangt.

Die folgenden Hinweise sollten Sie unbedingt beachten:

Die Aufgabe besteht aus zwei Einstiegsaufgaben und drei Abschlussaufgaben.

- Lesen Sie den Aufgabentext gründlich. Klären Sie, worin die eigentliche Aufgabe besteht, und verteilen Sie die Arbeit im Team sinnvoll.
- Für die Bearbeitung der Aufgabe haben Sie 7 Stunden Zeit. Planen Sie genügend Zeit für die Abschlussaufgaben ein. Auch das Aufschreiben der Lösung kostet viel Zeit.
- Bevor Sie mit der Arbeit am Abschlussauftrag beginnen, stellen Sie einander ihre Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor.
- In den beiden ersten Abschlussaufgaben geht es ganz darum, eine allgemeine Vorgehensweise für die Untersuchung, die danach durchgeführt werden soll, zu entwickeln.
- Die Antworten zu den Einstiegsaufgaben (1 und 2) gehören nicht in die Ausarbeitung der Abschlussaufgaben (3, 4 und 5). Diese Resultate werden als Anhang an die Arbeit angefügt. In den Abschlussaufgaben kann dann ggf. auf sie verwiesen werden.
- Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgabe Bücher und einen Computer benutzen.

Bestandteile Ihrer Ausarbeitung:

- Unter jeder Aufgabe ist beschrieben, in welcher Weise sie in die Arbeit eingehen soll.
- Als Anlage: Die Ergebnisse zu den Einstiegsaufgaben (Aufgaben 1 und 2)

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten Kopien Ihrer Arbeit. Damit die Kopien gut lesbar sind, halten Sie Ihre Arbeit bitte durchweg im A4-Format, drucken Sie in schwarzweiß und benutzen Sie nur schwarz schreibende Stifte (keinen Bleistift!). Erstellen Sie im Zweifelsfall eine Probekopie.

Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu unterstützen, erwähnen Sie bitte den Namen Ihrer Schule in Ihrer Arbeit nicht.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- sinnvoller, richtiger und geschickter Gebrauch von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (hierbei kann der Realitätsbezug von Bedeutung sein)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!



Mathematik A-lympiade: Vorrunde 2010-2011

Gut und günstig Parken

Auf den Parkplätzen von Amsterdam Schiphol gelten unterschiedliche Parktarife: Nicht jeder bezahlt dieselbe Tagesgebühr. Dies wird in der unten abgebildeten Werbeanzeige deutlich. In dieser Aufgabe der A-lympiade untersucht ihr, wie man für einen Parkplatz mit 500 Plätzen (beispielsweise den eines Flughafens) einen möglichst großen Gewinn erzielt.

Schiphol Smart Parking

Suchen Sie einen sicheren und preisgünstigen Parkplatz am Flughafen? Dann ist Schiphol Smart Parking das beste Angebot, Ihr Auto auf Schiphol zu parken. Dazu müssen Sie mindestens eine Woche vor Reiseantritt mit Ihrer Kreditkarte online reservieren und bezahlen.

		Normaler Tarif	Schiphol Smart Parking Tarif
3	Tage	€ 52,50	€ 37,50*
8	Tage	€ 85,00	€ 49,50
15	Tage	€ 130,50	€ 89,50
22	Tage	€ 176,00	€ 110,00

*Dieser Tarif ist zwei Wochen im Voraus zu reservieren

Überprüfen Sie, ob Ihr Tarif verfügbar ist und reservieren Sie!



**EXTRA
Frühbucher
Rabatt**

Für 2010 können Sie noch weitere Frühbucher Rabatte erhalten.

Wenn Sie z. B. mindestens 6 Wochen im Voraus buchen, bezahlen Sie für 22 Tage nur 95,- € (4,32 € pro Tag).

Für diese Angebote gibt es nur eine begrenzte Zahl von Plätzen. Buchen Sie deshalb bald!

Reservieren Sie jetzt!

Einleitung

Man könnte einen Parkplatz mit 500 Plätzen ganz einfach wie folgt verwalten: Man legt einen einheitlichen Tarif fest, beispielsweise 10 € pro Tag und sieht dann, wie viele Autos täglich kommen und wie lange sie bleiben. Wenn der Parkplatz voll ist, dann haben neu ankommende Autofahrer Pech gehabt, die dann auf einem anderen Parkplatz eventuell mehr als 10 € pro Tag zahlen.

Die beschriebene Vorgehensweise ist hinsichtlich des Gewinns sicherlich nicht optimal. An machen Tagen werden viele Parkplätze frei bleiben. Für Personen, die einen Parkplatz für einen längere Zeitraum suchen, wie zum Beispiel Urlauber, wird der Preis zu hoch sein. Für diese Personengruppe gilt: Je niedriger der Tarif ist, desto mehr Kunden kommen. Für viele Geschäftsleute spielt der hohe Preis keine Rolle, sofern sie nur sicher sein können, dass sie einen Parkplatz bekommen. Diese geschäftlich Reisenden lassen ihre Autos meisten nur ein paar Tage lang stehen. Es wäre unwirtschaftlich, diese zahlungskräftigen Kunden abzuweisen, weil die Parkplätze alle schon zu geringen Preisen vergeben sind.

Kurz gesagt:

- Für diejenigen Kunden, die (ungeachtet des Preises) sicherlich kommen, sofern sie Gewissheit haben, dass sie einen Platz bekommen, sichert man einen Teil der Parkplätze durch hohe Parkgebühren.
- Kunden, die einen Parkplatz für einen längeren Zeitraum belegen, den sie gegebenenfalls auch im Voraus reservieren können, wird ein niedrigerer Tarif angeboten.

Wenn einmal genug Bedingungen bekannt sind, dann kann man für die Tarife tagesabhängig bestimmen. In dieser Aufgabe der A-lypiade untersucht ihr, wie ihr durch Festlegen von Tarifen den Parkplatz optimal verwalten könnt.

Teil 1: Die erste Woche

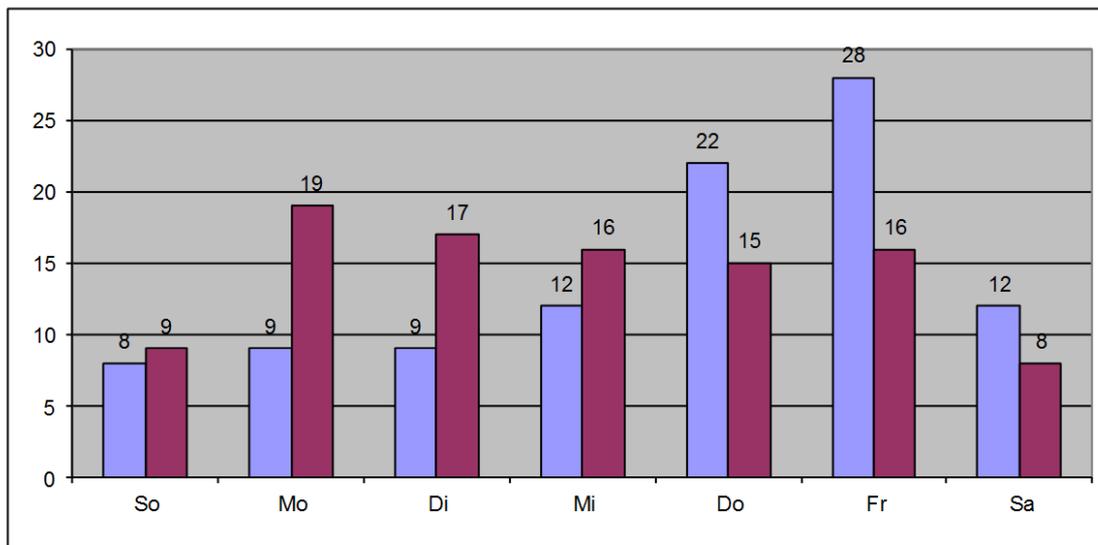
Wir gehen davon aus, dass sich die Parkplatzkunden im wesentlichen aus zwei Gruppen zusammensetzen:

- aus Geschäftsleuten, die bereit sind, hohe Gebühren zu zahlen und ihr Auto nur für kurze Zeit parken
- aus Urlaubern, die wegen günstiger Tarife (Sonderangebote) herkommen und lange parken

Aus Untersuchungen geht hervor, dass beide Gruppen bevorzugte Ankunftstage haben, wie in der unten abgebildeten Graphik zu erkennen ist. Diese Graphik gilt für eine gewöhnliche Woche, die nicht in die Urlaubszeit fällt. In einer solchen Woche kommen durchschnittlich 500 Parkplatzsuchende, die geschäftlich unterwegs sind und ihr Auto für zwei Tage parken, sowie 200 Urlauber, die ihr Auto durchschnittlich vier Tage lang parken. Vorläufig setzen wir noch folgende Bedingungen voraus:

- Die Kunden parken immer morgens.
- Die Kunden holen ihre Autos immer abends ab.

Graphik 1



-  prozentualer Anteil von Urlaubern, die am jeweiligen Wochentag einen Parkplatz suchen (200 Urlauber pro Woche, durchschnittliche Parkdauer 4 Tage)
-  prozentualer Anteil von Geschäftsreisenden, die am jeweiligen Wochentag einen Parkplatz suchen (500 Geschäftsreisende pro Woche; durchschnittliche Parkdauer 2 Tage)

Aus der Graphik kann man beispielsweise ablesen, dass 15% der Geschäftsreisenden donnerstags auf den Parkplatz kommen (sie holen dann ihr Auto also freitags abends wieder ab).

Aufgabe 1

Wir gehen von einem leeren Parkplatz am Sonntagmorgen aus. Wie viele Autos von Geschäftsreisenden werden dann erwartungsgemäß am Donnerstagmittag auf dem Parkplatz stehen? Wie viele werden es am Samstagabend sein?

Aufgabe 2

Eine Woche später wird der Parkplatz erwartungsgemäß nicht leer sein. Es werden beispielsweise Autos von Urlaubern dort stehen, die am Freitag gekommen sind. Von einem bestimmten Tag an wird sich die Situation stabilisieren und die Zahl der parkenden Autos wird jeden Montag gleich sein, genauso jeden Dienstag usw.

Berechnet für die oben beschriebene stabile Situation den zu erwartenden Gewinn des Parkplatzes für eine Woche. Legt dabei einen festen Tarif von 10 € pro Tag für Geschäftsreisende und von 6 € pro Tag für Urlauber zu Grunde.

Arbeitet die Aufgaben 1 und 2 als Anlage aus und fügt sie eurer Arbeit bei.

Teil 2: Der Tarif für Urlauber in der Urlaubssaison

Wir gehen von durchschnittlich 500 Geschäftsreisenden pro Woche aus, die für einen Parkplatz 10 € pro Tag bezahlen und wie in der Graphik dargestellt über die Woche verteilt ankommen. Ein Teil des Parkplatzes bleibt für solche Geschäftsreisenden reserviert. Die übrigen Plätze können dann von Urlaubsreisenden belegt werden.

Bislang sind wir von 200 Urlaubern pro Woche ausgegangen, die einen Parkplatz gesucht haben. Während der Schulferien können wir nicht davon ausgehen, dass diese Zahl auf 200 begrenzt bleibt. Die Zahl der Urlauber, die ihr Auto auf diesem Parkplatz abstellen

möchten, wird von den Parkgebühren abhängen.

Wie viele Parkplatz suchende Urlauber darf man bei welchem Tarif erwarten? Die meisten Urlaubsreisenden kommen bei hohen Parkpreisen nicht mit dem Auto zum Flughafen. Sie lassen sich bringen oder kommen mit dem Zug. Diese Urlaubsreisenden kann man versuchen, durch niedrige Parkgebühren dazu zu verleiten, mit dem Auto zum Flughafen zu kommen. Einen solchen Versuch erkennt man in der Werbeanzeige, das auf Seite 1 dieser Aufgabe abgebildet ist.

Es gibt eine Untersuchung über die Zahl der Urlaubsreisenden pro Woche, die bei einem bestimmten Parktarif einen Parkplatz am Flughafen belegen. Das Ergebnis dieser Untersuchung ist in der folgenden Graphik zu erkennen:

Graphik 2



Angesichts der Größe des Parkplatzes von 500 Plätzen ist ein Tarif von 1 € pro Tag nicht sinnvoll. Welcher Tarif ist dann besonders gut? Der Tarif von 6 € pro Tag aus den ersten Aufträgen? Sollte dieser Tarif verändert werden oder gerade nicht? Darüber hinaus könnte es sein, dass man den wöchentlich zu erwartenden Gewinn vergrößern kann, wenn man Geschäftsreisenden weniger Parkplätze bereit stellt oder gerade indem man allen Geschäftsreisenden Parkplätze sichert. Die Angaben aus der Graphik 1 gelten weiterhin.

Aufgabe 3

- Plant eine Vorgehensweise, wie ihr untersuchen wollt, welcher Tarif zum höchsten Gewinn für den Parkplatz führt. Beschreibt eure Vorgehensweise detailliert.
- Führt eure Untersuchung nach der ausgearbeiteten Vorgehensweise durch, überprüft, ob ihr auf diese Weise das gewünschte Ergebnis erhaltet und überarbeitet gegebenenfalls eure Vorgehensweise.

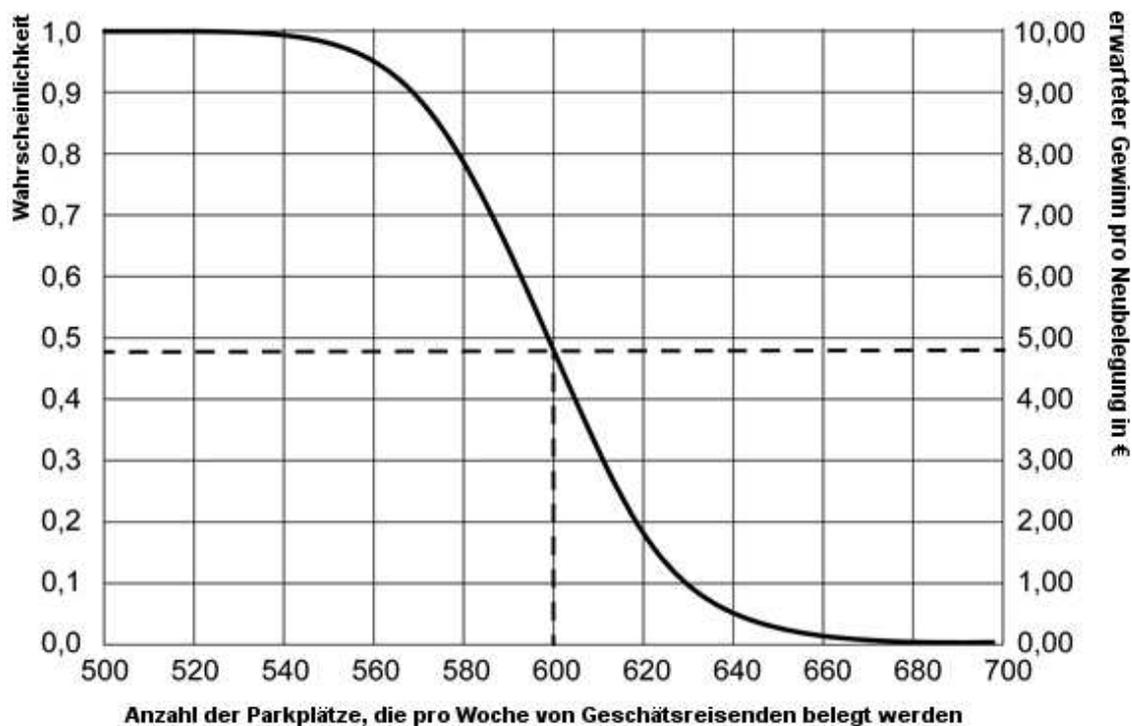
Arbeitet eine ausführliche Beschreibung eurer Vorgehensweise bei dieser Untersuchung aus, dokumentiert sie sinnvoll durch Berechnungen und schließt eine kritische Betrachtung über die Qualität eurer Untersuchungsergebnisse daran an. Dies ist Bestandteil der Arbeit, die ihr abgibt.

Teil 3: Die geschäftlich reisenden Parkplatzkunden

Bislang sind wir von etwa durchschnittlich 500 Parkplatzsuchenden pro Woche, die geschäftlich unterwegs sind, ausgegangen. Aber sind es tatsächlich 500? Diese Zahl kennt man nie im Voraus. Es ist wichtig, darüber eine Aussage machen zu können. Urlaubsreisende reservieren immer einige Wochen im Voraus, während Geschäftsreisende einfach anreisen. Für Geschäftsreisende müssen deshalb Plätze frei gehalten werden. Aber wie viele sollten das sein? Leere Plätze bringen keinen Gewinn!

Eine Studie liefert eine Zufallsverteilung für die Zahl der geschäftlich reisenden Parkplatzkunden. Es wird aus der Studie ersichtlich, dass 500 geschäftlich reisende Parkplatzkunden pro Woche sicher sind, aber die Zahl kann in manchen Wochen auch höher liegen, manchmal sogar bei fast 700. Die Ergebnisse sind in folgender Graphik dargestellt:

Graphik 3



Dieser Graphik kann man entnehmen, wie hoch erwartungsgemäß die Einnahmen für einen zusätzlich für Geschäftskunden freigehaltenen Parkplatz sind. Je mehr Parkplätze bereits freigehalten sind, desto niedriger liegt der zu erwartende Gewinn für einen zusätzlich freigehaltenen Parkplatz. Dies wird in folgendem Beispiel klar:

Die Graphik zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für mindestens 600 geschäftlich reisende Parkplatzkunden 0,48 ist. Die zugehörigen erwarteten Einnahmen durch die Reservierung von 600 (statt 599) Parkplätzen sind demnach $10 \text{ €} \cdot 0,48 = 4,80 \text{ €}$ bei einem Tarif von 10 € pro Tag.

Zur Bestimmung des größt möglichen Gewinns müssen demnach drei Faktoren berücksichtigt werden:

- die Verteilung der ankommenden Parkplatz Suchenden pro Woche (Graphik 1)
- die vom Tarif abhängige Zahl der Parkplatz suchenden Urlaubsreisenden
- die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zahl geschäftlich reisender Parkplatzkunden

Aufgabe 4

Untersucht den Einfluss der Zufallsverteilung aus Graphik 3 auf die optimale Situation, die ihr in Aufgabe 3 gefunden habt. Ihr könnt nun keine konkreten Gewinne mehr berechnen, sondern Erwartungswerte für die Gewinne (also einen Gewinn multipliziert mit der Wahrscheinlichkeit für den Gewinn). Arbeitet wieder zunächst eine Vorgehensweise aus, beschreibt sie und führt dann nach dieser Vorgehensweise eure Untersuchung durch.

Arbeitet eine ausführliche Beschreibung eurer Vorgehensweise bei dieser Untersuchung aus, dokumentiert sie sinnvoll durch Berechnungen und schließt eine kritische Betrachtung über die Qualität eurer Untersuchungsergebnisse daran an. Dies ist Bestandteil der Arbeit, die ihr abgibt.

Aufgabe 5

Die Aufgaben umreißen eine Methode, die tatsächlich bei Flugzeugbelegungen und Parkplatzverwaltungen angewandt wird. Diese Methode wurde 1989 von Peter Belobaba entwickelt und heißt „Expected Marginal Seat Revenue Model“. Es wurden mit dieser Methode Gewinnerhöhungen von ungefähr 7% erzielt.

Verfasst eine qualitative Analyse dieser Methode: Wo seht ihr Schwachstellen, welche Angaben sind gut oder weniger gut zu ermitteln, welche weiteren Angaben wären wichtig usw. Bringt eure eigenen Erkenntnisse in die Analyse ein und nehmt auf die Ergebnisse der Aufgaben 3 und 4 Bezug, um eure Positionen zu belegen.

Arbeitet eine kritische Darlegung der Methode in Form eines kurzen Artikels für eine Fachzeitschrift aus. Der Artikel besteht höchstens zur Hälfte aus erläuternden Berechnungen. Dies ist Bestandteil der Arbeit, die ihr abgibt.