

Vier in einer Reihe



Aufgabe der Vorrunde für die 24-te Mathematik A-lympiade

16. November 2012

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe



Die Mathematikwettbewerbe MACHT MATHE in NRW werden vom Ministerium für Schule und Weiterbildung in Zusammenarbeit mit dem Freudenthal-Institut Utrecht ausgerichtet mit freundlicher Unterstützung durch den Landesverband Mathematikwettbewerbe NRW und die Universitäten zu Köln und zu Münster.

Hinweise für die Teams

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Sie beteiligen sich heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von Ihnen verlangt.

Die folgenden Hinweise sollten Sie unbedingt beachten:

Die Aufgabe besteht aus einer Einstiegsaufgabe, zwei Folgeaufgaben und einer Abschlussaufgabe.

- Lesen Sie den Aufgabentext gründlich. Klären Sie, worin die eigentliche Aufgabe besteht, und verteilen Sie die Arbeit im Team sinnvoll.
- Für die Bearbeitung der Aufgabe haben Sie 7 Stunden Zeit. Planen Sie genügend Zeit für die Abschlussaufgaben ein. Auch das Aufschreiben der Lösung kostet viel Zeit.
- Bevor Sie mit der Arbeit am Abschlussauftrag beginnen, stellen Sie einander ihre Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor.
- In manchen Aufgabenstellungen finden Sie den Auftrag „Untersuchen Sie ...“. Führen Sie immer sorgfältig an, *was* genau Sie untersucht haben. Recherchieren Sie unter Umständen weitere/untergeordnete Fragestellungen, betrachten Sie Alternativen, gehen Sie über die einfache Bearbeitung der Aufgabenstellung hinaus. Die Ergebnisse dieser Aufgabenstellungen werden nach diesen Kriterien beurteilt.
- Die Antworten zu der Einstiegsaufgabe (1) und zu den Folgeaufgaben (2 und 3) gehören nicht in die Ausarbeitung der Abschlussaufgabe (4). Diese Resultate werden als Anhang an die Arbeit angefügt. In der Abschlussaufgabe kann dann ggf. auf sie verwiesen werden.
- Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgabe Bücher und einen Computer benutzen.

Bestandteile Ihrer Ausarbeitung:

- Die gesamte detaillierte Bearbeitung des Abschlussauftrages
- Als Anlage: Die Ergebnisse zu der Einstiegsaufgabe (Aufgabe 1) und zu den Folgeaufgaben (Aufgaben 2 und 3)

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten Kopien Ihrer Arbeit. Damit die Kopien gut lesbar sind, halten Sie Ihre Arbeit bitte durchweg im A4-Format, drucken Sie in schwarzweiß und benutzen Sie nur schwarz schreibende Stifte (keinen Bleistift!). Erstellen Sie im Zweifelsfall eine Probekopie.

Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu unterstützen, erwähnen Sie bitte den Namen Ihrer Schule in Ihrer Arbeit nicht.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Gebrauch von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (hierbei kann der Realitätsbezug von Bedeutung sein)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!



Vier in eine Reihe

Einleitung

Eine überregionale Supermarkt-Kette hat eine besondere Regelung: Jeder Kunde, der sich als Vierter in die Wartereihe anstellt, muss den Inhalt seines Einkaufswagens nicht bezahlen!

Diese Kampagne ist ein guter Anlass, den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Kunden in einem Supermarkt und der Anzahl der Kassen, die für eine schnelle Abfertigung der Kunden benötigt wird, genauer zu untersuchen. Natürlich möchte die Supermarktleitung dabei nicht allzu oft Artikel verschenken müssen.

Zu Beginn stellen wir die Sonderregelung, so wie sie der Supermarkt auf seine Webseite veröffentlicht hat, vor:

	Kasse 1	Kasse 2	Kasse 3
Kunde beim Kassieren			
Wartender 1			
Wartender 2			
Wartender 3			
Wartender 4		Gratis! 	

1. Wenn Sie der vierte Wartende in einer Reihe sind, müssen Sie für Ihre Einkäufe nicht bezahlen.
2. Der Kunde an der Kasse wird nicht als Wartender gezählt. Das bedeutet, der vierte Wartende in der Reihe ist der fünfte Kunde an der Kasse.
3. Die Regelung ist nur dann gültig, wenn Sie keine kürzere Wartereihe wählen können.
4. Sobald Sie der vierte Wartende an der Kasse sind, müssen Sie den Kassierer benachrichtigen. Warten Sie nicht, bis Sie an der Kasse angekommen sind, denn dann kann Ihre Behauptung nicht mehr überprüft werden.

Diese Regeln sind der Ausgangspunkt für alle weiteren Aufträge der diesjährigen Aufgabe der A-lympiade.

Einstiegsauftrag

Ein kleiner Supermarkt

Ein kleiner lokaler Supermarkt besitzt zwei Kassen. Der Inhaber überlegt sich, die Sonderregelung der überregionale Supermarktkette einzuführen. Allerdings ist das Verschenken ganzer Einkaufswagen voller Artikel für den Inhaber des Supermarktes teuer. Deswegen möchte er zuerst die Sonderregelung in seinem Geschäft testen. Nur während der Testphase wird er jedem vierten Wartenden in der Reihe seine Einkäufe kostenlos überlassen.

Am Test-Tag wird nur eine Kasse um 8:00 Uhr geöffnet. Der Inhaber notiert sich die Zeiten, bei denen sich die Kunden an der Kasse anstellen. Sie finden diese Zeiten in der Tabelle auf dieser Seite.

Im Mittel braucht jeder Kunde drei Minuten, um an der Kasse zu bezahlen.

Aufgabe 1

Untersuchen Sie die Entwicklung der Warteschlange an der Kasse zwischen 8:00 Uhr und 9:00 Uhr. Beschreiben Sie klar und deutlich, wie Sie dabei vorgegangen sind.

Berechnen Sie die mittlere Wartezeit pro Kunde an der Kasse. Gibt es Kunden, die während dieser Stunde für ihre Einkäufe nicht bezahlen müssen?

Ankunftszeit an der Kasse	Anzahl der sich neu anstellenden Kunden
8.01	1
8.02	2
8.07	1
8.14	2
8.15	1
8.16	1
8.22	1
8.24	1
8.25	1
8.29	1
8.31	1
8.33	1
8.34	1
8.39	1
8.45	1
8.50	1
8.56	1

Folgaufträge

Die zweite Kasse

Ab 9:00 Uhr am Test-Tag sind zwei Kassen offen.

Der Inhaber notiert sich wieder die Zeiten, bei denen sich die Kunden an der Kasse anstellen. Sie finden die Zeitangaben sowie die Anzahl der Kunden, die sich um diese Zeit an der Kasse anstellen, in der Tabelle auf dieser Seite. Wir nehmen dabei an, dass die Wartenden immer die kürzeste Reihe zum Anstellen aussuchen.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die Entwicklung der Warteschlange an beiden Kassen zwischen 9:00 Uhr und 10:00 Uhr. Stellen Sie dies anschaulich dar. Beschreiben Sie auch hier klar und deutlich, wie Sie bei Ihrer Untersuchung vorgegangen sind.

Berechnen Sie die mittlere Wartezeit pro Kunde an der Kasse. Gibt es Kunden, die während dieser Stunde für ihre Einkäufe nicht bezahlen müssen?

Aufgabe 3

Solange es im Geschäft ruhig ist und es nur wenige Kunden gibt, möchte der Supermarkthinhaber nur eine Kasse öffnen, um seinen Mitarbeitern die Gelegenheit zu geben, die Ware einzusortieren oder anderen Tätigkeiten nachzugehen. Andererseits möchte er möglichst vermeiden, Kunden ihre Einkäufe kostenlos überlassen. Er entscheidet daher, jedesmal eine zweite Kasse zu öffnen, wenn außer dem bezahlenden Kunden noch drei weitere Kunden an der Kasse warten. Der nächste Kunde kann dann sofort bezahlen. Die zweite Kasse wird danach so schnell wie möglich wieder geschlossen.

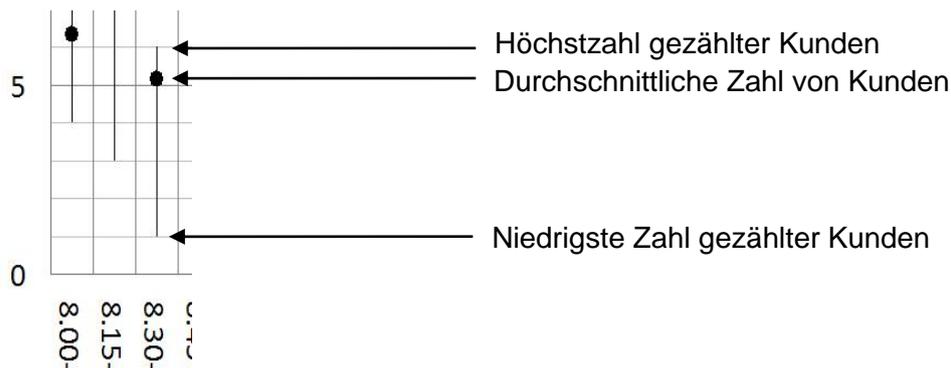
Untersuchen Sie, wie sich die Warteschlangen an den Kassen zwischen 9:00 Uhr und 10:00 Uhr entwickelt hätten, wenn der Inhaber das oben beschriebene Verfahren verwendet hätte. Geben Sie die Zeiten an, bei denen nur eine Kasse und bei denen beide Kassen offen gewesen wären.

Berechnen Sie erneut die mittlere Wartezeit pro Kunde an der Kasse und geben Sie an, ob es Kunden gegeben hätte, die Ihre Einkäufe nicht bezahlen mussten. Begründen Sie Ihre Aussagen sowie alle Annahmen, die Sie gemacht haben.

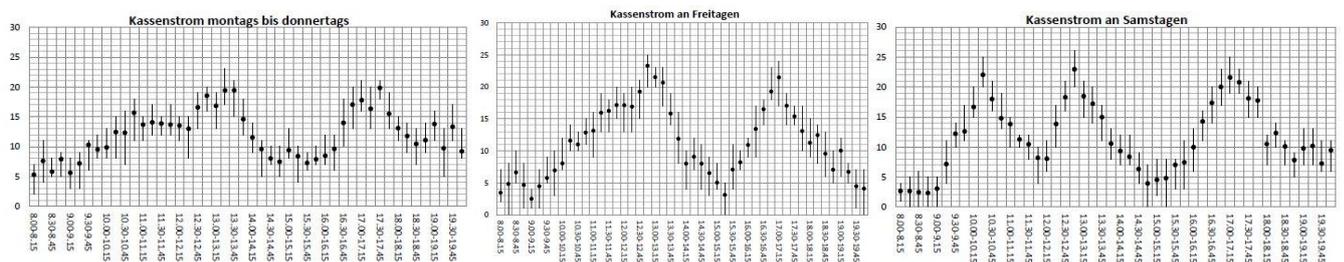
Zeitpunkt der Ankunft	Anzahl der sich neu anstellenden Kunden
9.00	1
9.01	1
9.02	1
9.04	1
9.08	1
9.09	1
9.10	2
9.11	1
9.16	1
9.19	1
9.21	2
9.25	1
9.27	1
9.32	2
9.33	3
9.34	1
9.35	3
9.36	1
9.37	1
9.39	1
9.43	1
9.48	1
9.50	1
9.53	1
9.57	1

Abschlussauftrag

In größeren Supermarktketten ist die Entwicklung des sogenannten Kassenstroms (die Anzahl der Kunden, die sich in einer bestimmten Zeit an der Kasse anstellen) aufgrund von häufigen Zählungen eine bekannte Größe. Nachdem der Kassenstrom während einer großen Anzahl von "normalen" Tagen (also von Tagen, die nicht um Feiertage oder Ferien liegen) beobachtet wurde, ist es möglich, den mittleren Kassenstrom pro Viertelstunde zu berechnen. Ebenfalls bekannt ist die kleinste und die größte Anzahl der Kunden, die sich in der jeweiligen Viertelstunde in der Warteschlange anstellen. Diese Daten sind in der folgenden Graphik wie folgt dargestellt:



Im Anhang 1-3 finden Sie die folgenden drei Diagramme in ihrer eigentlichen Größe:



Ausgehend von dieser Art von Diagrammen muss ein Supermarktmanager die Anzahl der Kassen, die im Laufe eines Tages geöffnet werden sollen, festlegen. Da die kostenlose Abgabe von Lebensmitteln teuer ist, braucht der Manager einen Ablaufplan zum Öffnen und Schließen der Kassen, welcher vier wartende Kunden in der Reihe verhindert. Andererseits sollen aus Kostengründen so wenig Kassen wie möglich geöffnet sein. Auch hier brauchen die Kunden im Mittel drei Minuten, um ihre Einkäufe an der Kasse zu bezahlen. Der Supermarkt besitzt acht Kassen.

Bisher liegen so viele Daten vor, dass der Manager ein Kassenstrom-Diagramm für jeden einzelnen Tag erstellen könnte. Es dauert jedoch viel zu lange, jeden Tag eine gründliche Untersuchung des Diagramms durchzuführen. Der Manager braucht daher eine Methode, die ihm erlaubt, möglichst schnell einen Ablaufplan zum Öffnen der Kassen zu erstellen.

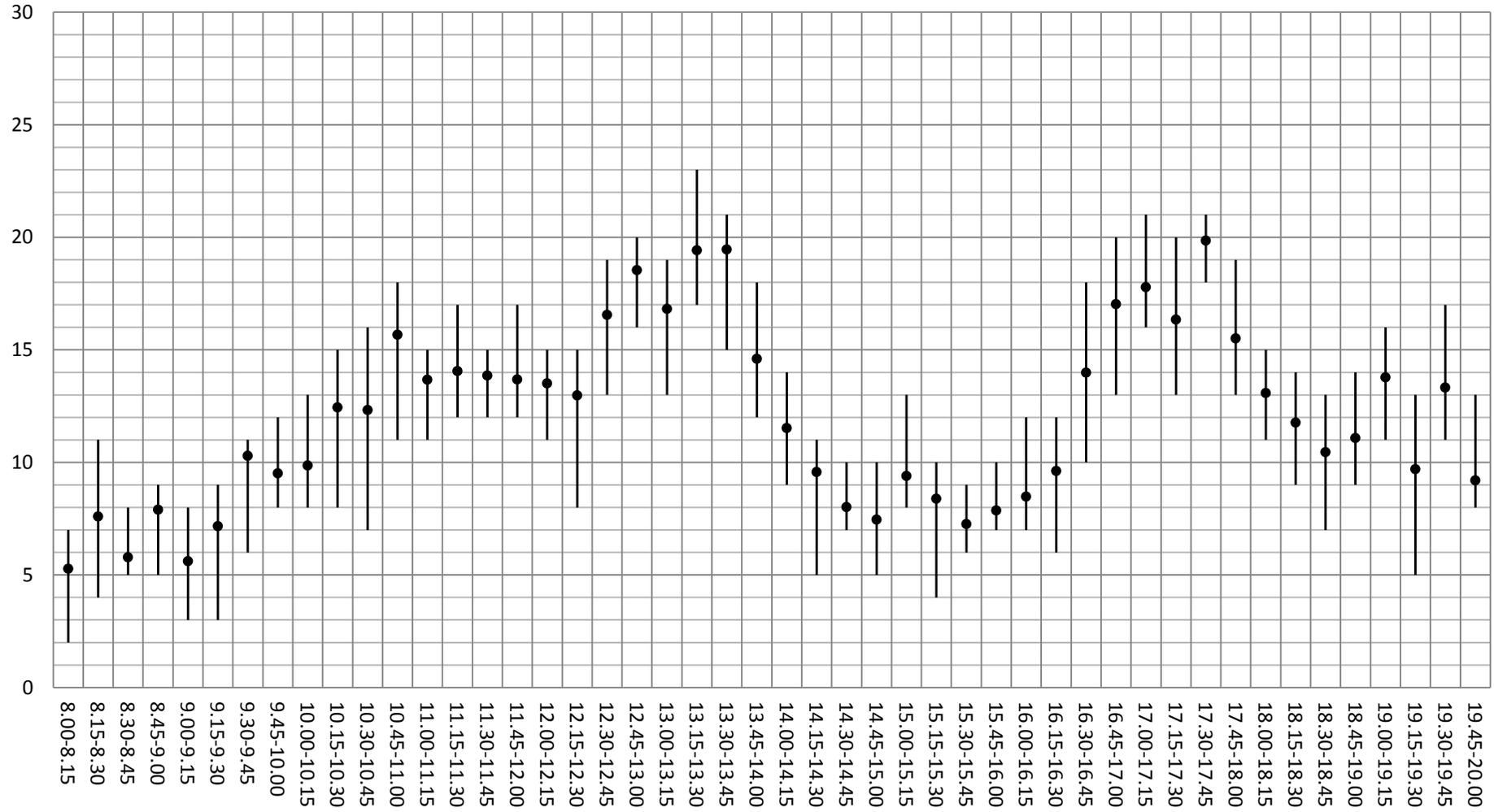
Aufgabe 4

Entwerfen Sie eine klare Anleitung, mit der der Manager aufgrund eines zufälligen Kassenstrom-Diagramms schnell einen Ablaufplan erstellen kann, in dem er sofort sehen kann, welche Kasse zu welchen Zeiten zu öffnen oder zu schließen ist.

Zeigen Sie mit Hilfe der gegebenen Kassenfluss-Diagramme, dass Ihre Anleitung funktioniert und zeigen Sie, wie sie dies überprüft haben. Hängen Sie dies ihrer Ausarbeitung an.

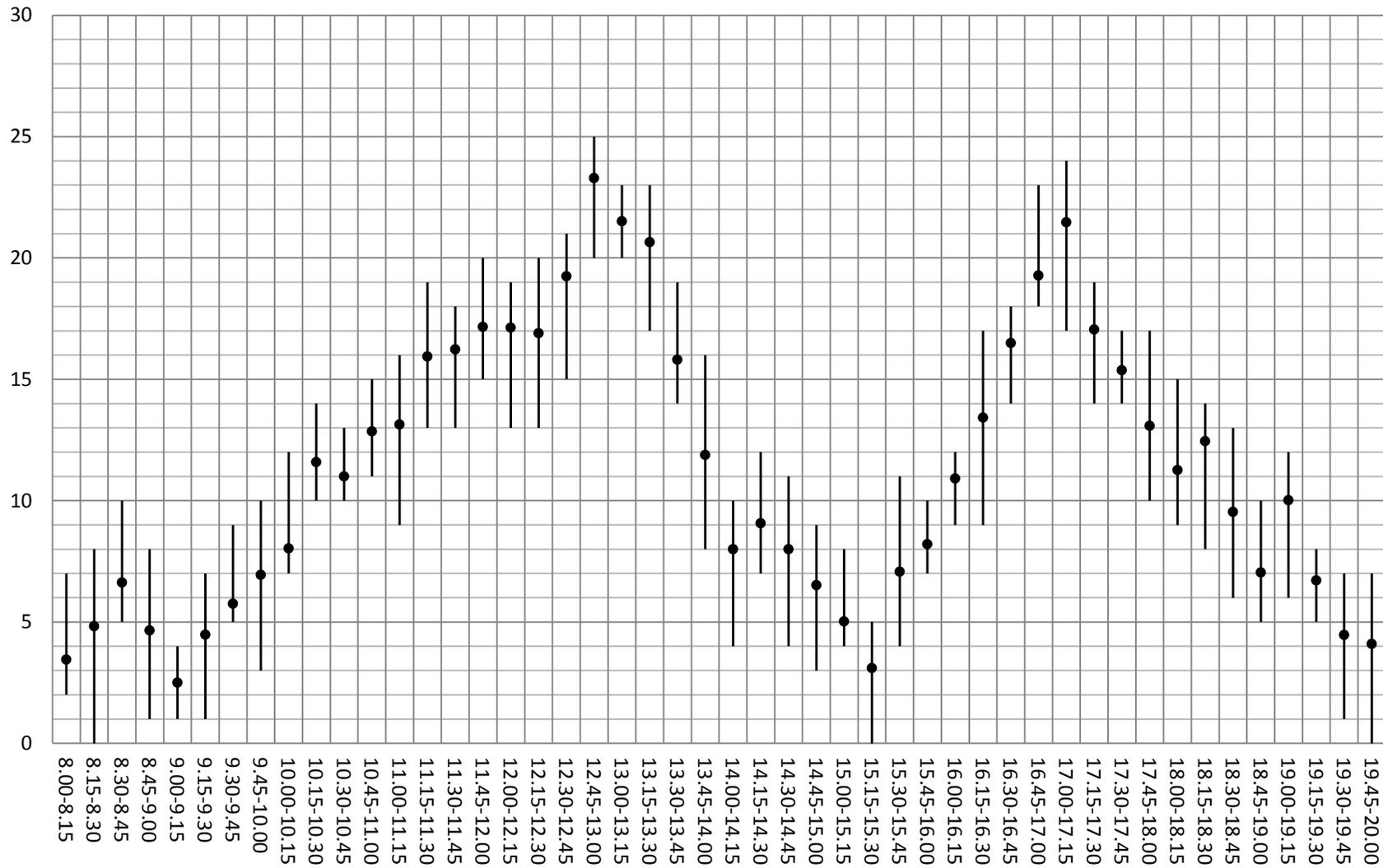
Anhang 1

Kassenstrom montags bis donnerstags



Anhang 2

Kassenstrom an Freitagen



Anhang 3

Kassenstrom an Samstagen

