

# DER RAUM IN ZAHLEN



Aufgabe der Vorrunde für die 25. Mathematik-Alympiade

15. November 2013

**macht mathe**  
internationale Mathematikwettbewerbe



## Impressum

Die Mathematik- Olympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Olympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich. Die Mitglieder der Kommission sind:

Sarah Abdellahi  
House of Mathematics, Isfahan, Iran

Dr. Ana Alboteanu  
Gymnasium Schwertstraße, Solingen

Marcel Daems  
Montaigne Lyceum, Den Haag

Tom Goris  
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg & Freudenthal Instituut, Utrecht

Dédé de Haan  
Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Kim Kaspers  
Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur,  
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert  
Röntgen Gymnasium, Remscheid, Deutschland

Ruud Stolwijk  
CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Martin Traas  
Zernike College, Haren

Monica Wijers  
Freudenthal Instituut, Utrecht

Sekretariat des Freudenthal Instituts: Liesbeth Walther en Mariozee Wintermans  
Freudenthal Instituut, Utrecht

Unter Mitwirkung von:  
Eric van Dijk, Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

Die Olympiade wird unterstützt durch

Das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen  
Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen  
Die Universitäten zu Bonn und zu Münster  
Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande  
CASIO, Amstelveen  
Texas Instruments, Utrecht  
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

## **Hinweise für die Teams**

Liebe Schülerinnen und Schüler!

Sie beteiligen sich an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von Ihnen verlangt.

### **Die folgenden Hinweise sollten Sie unbedingt beachten:**

Die Aufgabe besteht aus sechs Aufträgen und einem Abschlussauftrag.

- Lesen Sie den Aufgabentext gründlich. Klären Sie, worin die eigentliche Aufgabe besteht, und verteilen Sie die Arbeit im Team sinnvoll.
- Für die Bearbeitung der Aufgabe haben Sie 7 Stunden Zeit. Planen Sie unbedingt genügend Zeit für den Abschlussauftrag ein. Auch das Aufschreiben der Lösung kostet viel Zeit.
- Bevor Sie mit der Arbeit am Abschlussauftrag beginnen, stellen Sie einander ihre Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor.
- In manchen Aufgabenstellungen finden Sie den Auftrag „Untersuchen Sie ...“. Führen Sie immer sorgfältig an, was genau Sie untersucht haben. Recherchieren Sie unter Umständen weitere/untergeordnete Fragestellungen, betrachten Sie Alternativen, gehen Sie über die einfache Bearbeitung der Aufgabenstellung hinaus. Die Ergebnisse dieser Aufgabenstellungen werden nach diesen Kriterien beurteilt.
- Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgabe Bücher und einen Computer benutzen.

### **Bestandteile Ihrer Ausarbeitung:**

- Ausarbeitung zu den sechs Aufträgen
- Ausarbeitung zum Abschlussauftrag

**Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten Ihre Arbeit in digitaler Form, also möglichst als pdf-Dokument. Achten Sie bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben.**

**Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu unterstützen, erwähnen Sie bitte den Namen Ihrer Schule in Ihrer Arbeit nicht.**

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Gebrauch von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (hierbei kann der Realitätsbezug von Bedeutung sein)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen usw.

**Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!**

# Der Raum in Zahlen

## Einleitung

Die Attraktivität eines Wohngebiets hängt von unterschiedlichen Voraussetzungen ab. Die Art und die Dichte der Bebauung, die Anordnung der Gebäude sowie Freiflächen und Grünanlagen spielen dabei eine große Rolle. Darüber hinaus ist für viele Menschen ein Bungalow attraktiver als eine Etagenwohnung in einem Hochhaus. Das ist natürlich von Person zu Person unterschiedlich: Einige Menschen leben lieber in einer dicht bebauten Innenstadt, als auf dem platten Land und umgekehrt.

Architekten und Städteplaner berücksichtigen diese Aspekte bei ihrer Planung von Wohnsiedlungen. Dazu werden Wohnsiedlungen mit Hilfe von bestimmten Parametern beschrieben. Verhältnisse aus diesen Parametern charakterisieren dann den Wohnraum. Dadurch kann ein Wohnraum mit Hilfe von Zahlen beschrieben werden.

## Begriffe

- Mit "*Gebiet*" bezeichnen wir ein Stück Land, auf dem Gebäude stehen, das aber auch unbebaute Bereiche enthält. Die gesamte Fläche dieses Gebiets nennen wir "*Gebietsfläche*".
- Die bebaute Fläche eines Gebiets bezeichnen wir als "*bebaute Fläche*".
- Die gesamte Nutzfläche der Gebäude bezeichnen wir als "*Gesamtwohnfläche*". Bei einem Wohnhaus ist die Gesamtwohnfläche die Fläche des Erdgeschosses zuzüglich der Grundflächen der weiteren Stockwerke.
- Die Anzahl der "*Geschosse*" eines Gebäudes ermittelt man, indem man das Erdgeschoss und die weiteren Obergeschosse zählt.
- Die Differenz aus der Gebietsfläche und der bebauten Fläche bezeichnen wir als "*Freifläche*".

## Beispiel



Die drei Wohngebäude auf dem Foto sind jeweils dreigeschossig (Erdgeschoss und zwei Obergeschosse). Sie besitzen jeweils eine bebaute Fläche von  $100 \text{ m}^2$ . Das Gebiet besitzt eine Fläche von  $1600 \text{ m}^2$ . Daher beträgt die gesamte Wohnfläche  $900 \text{ m}^2$  und die Freifläche  $1300 \text{ m}^2$ .

## Teil 1 Verhältnisse

Mit Hilfe der soeben erläuterten Begriffe werden nun vier Verhältnisse definiert, die zur Beschreibung einer Wohnsiedlung hilfreich sein werden:

Bebauungs-Gebiets-Verhältnis:  $BGV = \frac{\text{bebauteFläche}}{\text{Gebietsfläche}}$

Das Wohn-Gebiets-Verhältnis:  $WGV = \frac{\text{Gesamtwohnfläche}}{\text{Gebietsfläche}}$

Die mittlere Geschosszahl:  $MGZ = \frac{\text{Gesamtwohnfläche}}{\text{bebaute Fläche}}$

Das Freiflächen-Wohnflächen-Verhältnis:  $FWV = \frac{\text{Gebietsfläche} - \text{bebauteFläche}}{\text{Gesamtwohnfläche}}$   
 $= \frac{\text{Freifläche}}{\text{Gesamtwohnfläche}}$

### Auftrag 1

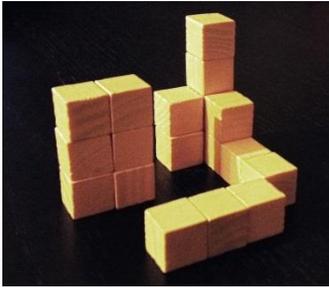
Berechnen Sie die Werte dieser vier Verhältnisse für das Gebiet aus dem Beispiel und erläutern Sie mit eigenen Worten die Bedeutung dieser Werte.

### Auftrag 2

Betrachten Sie mehrere weitere Möglichkeiten von Bebauungen mit derselben Gesamtwohnfläche (900 m<sup>2</sup>) auf einem Gebiet von 1600 m<sup>2</sup>. Untersuchen Sie\*, wie sich die vier Verhältnisse verändern. Stellen Sie Ihre Ergebnisse gut verständlich dar und verwenden Sie hierbei auch Skizzen, Tabellen und Graphen.

\* Lesen Sie in den Hinweisen vor der Aufgabe nach, was bei einem Untersuchungsauftrag von Ihnen erwartet wird.

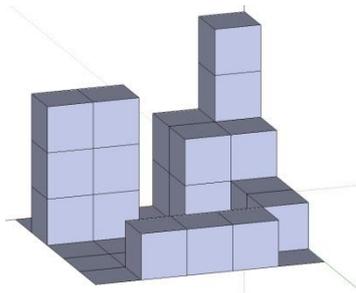
Verwenden Sie bei den weiteren Aufträgen Kästchenpapier, das Programm "SketchUp" das Applet "building houses" ([http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe\\_en.html](http://www.fi.uu.nl/wisweb/applets/mainframe_en.html)) oder reale Würfel, um sich Bebauungen zu veranschaulichen und gegebenenfalls Abbildungen zu erstellen.



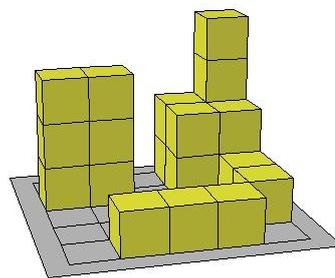
Reale Würfel

			2	4
3	3		2	2
				1
				1
	1	1	1	

Kästchenpapier



Programm "SketchUp"



Applet "building houses"

### Auftrag 3

Zu vorgegebenen Werten der oben definierten vier Verhältnisse können Sie unterschiedliche Wohnsiedlungen entwerfen. Betrachten Sie nun ein Gebiet in Form eines 5 x 5-Gitters sowie folgende Verhältnisse:

$$BGV = \frac{16}{25}; \quad WGV = \frac{6}{5}; \quad MGZ = \frac{15}{8} \quad \text{und} \quad FWV = \frac{3}{10}$$

Entwerfen Sie nun zwei unterschiedliche Wohnsiedlungen, auf welche diese vier räumlichen Verhältnisse zutreffen.

### Auftrag 4

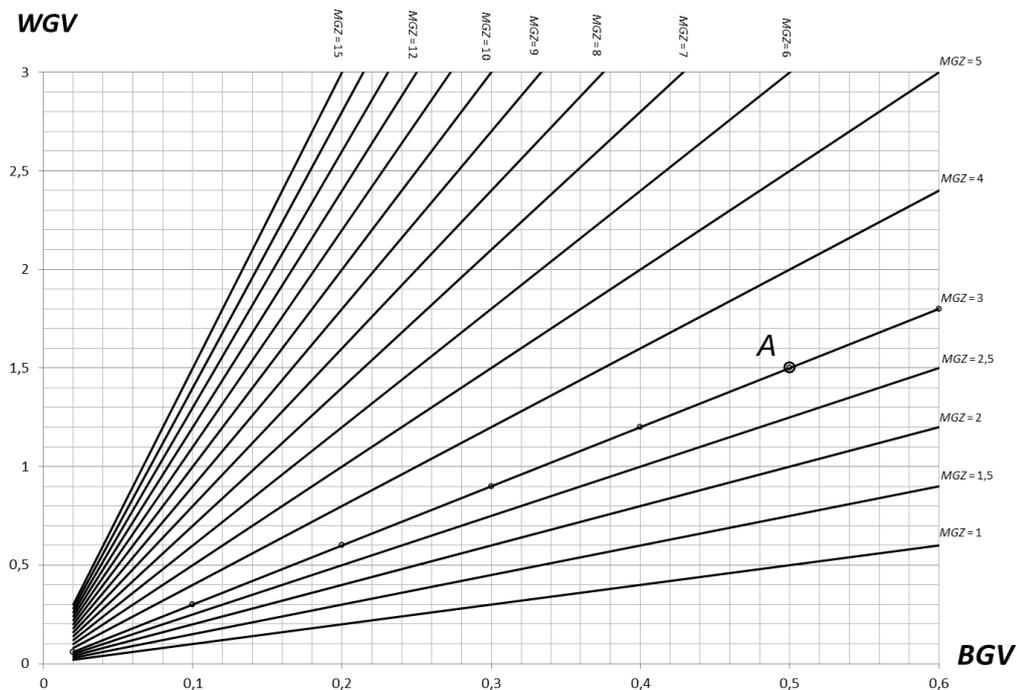
Bezüglich der vier Verhältnisse für die Beschreibung eines Gebietes kann man einige interessante Zusammenhänge herausfinden. Die Verhältnisse hängen zum Beispiel miteinander zusammen. Man kann auch sehr einfach herleiten, dass der Wert von BGV immer zwischen 0 und 1 liegt. Untersuchen Sie, welche Werte die Verhältnisse annehmen können, wie sie miteinander zusammenhängen und welche Bedeutung sie für die Merkmale einer Wohnsiedlung haben.

Stellen Sie Ihre Ergebnisse unter Verwendung einer klaren Argumentation gut verständlich in einer kurzen Abhandlung dar. Verwenden Sie dabei auch Zeichnungen, Tabellen und Graphen.

## Teil 2 Ein Diagramm

Die oben definierten Verhältnisse können durch Funktionsgraphen dargestellt werden. In der folgenden Abbildung ist ein Teil dieser Graphen abgebildet. Eine vergrößerte Darstellung finden Sie in der Anlage 2. In dem Koordinatensystem sind  $BGV$  und  $WGV$  an den Achsen aufgetragen. Die eingezeichneten linearen Graphen gehören jeweils zu einem festen Wert von  $MGZ$ .

Im Diagramm ist abzulesen, dass für den Punkt  $A$  gilt:  $BGV = 0,5$ ;  $WGV = 1,5$  und  $MGZ = 3$ .



### Auftrag 5

Erläutern Sie, warum für jeden Wert von  $MGZ$  in dieser Darstellung ein linearer Graph entsteht.

### Auftrag 6

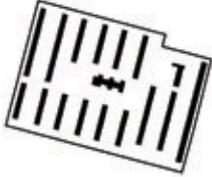
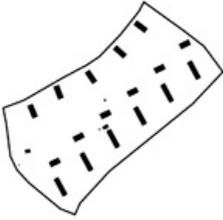
In der Anlage 1 sind für vier unterschiedliche Wohnsiedlungen jeweils ein Foto, ein Lageplan und Flächendaten angegeben. Markieren Sie jede dieser Wohnsiedlungen im Diagramm in Anlage 2. Erläutern Sie Ihre Ergebnisse.

Es existieren natürlich viele unterschiedliche Arten von Wohnsiedlungen. In den vorangegangenen Aufträgen haben Sie herausgefunden, dass unterschiedliche Arten von Wohngebieten zu unterschiedlichen Punkten im Diagramm gehören. Umgekehrt können Sie über ein Wohngebiet die eine oder andere Aussage treffen, wenn Sie wissen, in welchem Teil des Diagramms es einzuzeichnen ist.

### Abschlussauftrag

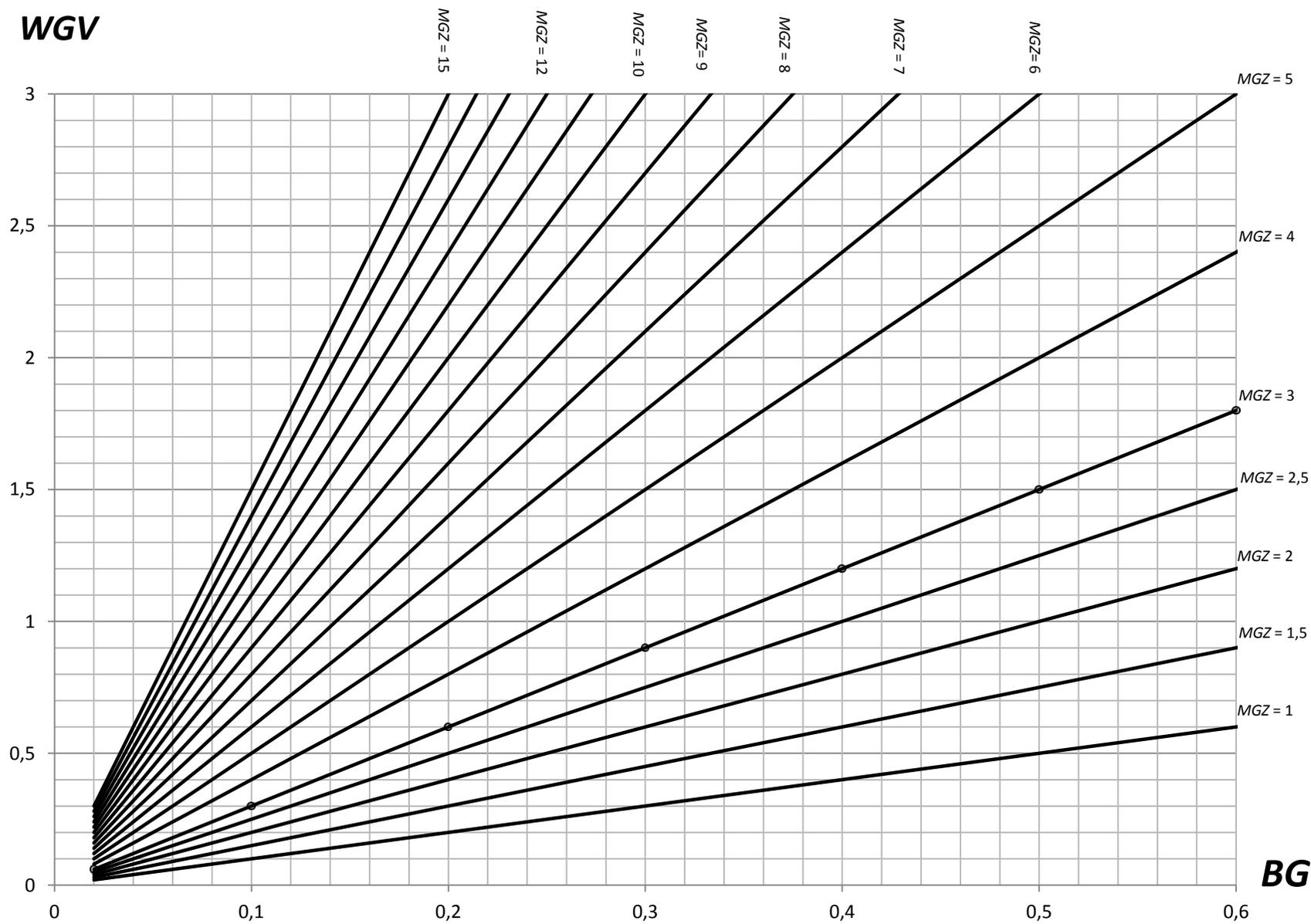
Charakterisieren Sie (mindestens vier) unterschiedliche Arten von Wohngebieten. Beschreiben Sie die Menge und die Art der Bebauung sowie die Freiflächen. Verwenden Sie in Ihrer Charakterisierung gegebenenfalls auch weitere relevante, in den vorangegangenen Aufträgen noch nicht behandelte Merkmale. Wählen Sie geeignete graphische Darstellungen für Ihre Charakterisierungen. Illustrieren Sie Ihre Ausarbeitung hinreichend (beispielsweise mit Fotos aus dem Internet, Lageplänen, Darstellungen aus verwendeten Programmen usw.).

## Anlage 1

 <p><b>Siedlung Alfa</b></p>	 <p>Gebietsfläche 72.000 m<sup>2</sup> bebaute Fläche 17.000 m<sup>2</sup></p>
 <p><b>Siedlung Bèta</b></p>	 <p>Gebietsfläche 107.000 m<sup>2</sup> bebaute Fläche 7.500 m<sup>2</sup></p>
 <p><b>Siedlung Gamma</b></p>	 <p>Gebietsfläche 30.000 m<sup>2</sup> bebaute Fläche 12.500 m<sup>2</sup></p>
 <p><b>Siedlung Delta</b></p>	 <p>Gebietsfläche 100.000 m<sup>2</sup> bebaute Fläche 2.000 m<sup>2</sup></p>

Anlage 2

**WGV**



**BGV**