

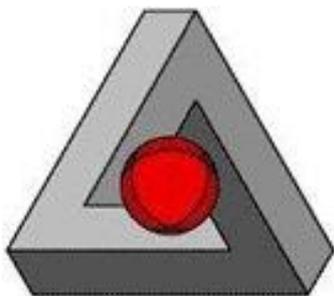
# Füllgrad



**Vorrundenaufgabe der 27. Olympiade**

**20. November 2015**

**macht mathe**  
internationale Mathematikwettbewerbe



## Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Alympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

Sarah Abdellahi  
House of Mathematics, Isfahan, Iran

Marcel Daems  
Montaigne Lyceum, Den Haag

Eric van Dijk  
Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris  
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan  
Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas  
Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Duitsland

Kim Kaspers  
Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur,  
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert  
Röntgen Gymnasium, Remscheid-Lennep, Duitsland

Ruud Stolwijk  
CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers  
Freudenthal Instituut, Utrecht

### **Sekretariat:**

Liesbeth Walther und Mariozee Wintermans  
Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Alympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Weiterbildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Die Universitäten zu Bonn und zu Münster
- Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande
- CASIO, Amstelveen
- Texas Instruments, Utrecht
- Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

## **Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2015/2016**

Liebe Schülerinnen und Schüler,  
Sie beteiligen sich an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von Ihnen verlangt.

Diese Aufgabe der Mathematik-Alympiade besteht aus sieben einzelnen Aufgaben und zwei Abschlussaufgaben. Die ersten sieben Aufgaben bilden die Vorarbeit für die Abschlussaufgaben: Alle hierbei erzielten Ergebnisse und Einsichten können in den Abschlussaufgaben verwendet werden.

### **Die folgenden Hinweise sollten Sie unbedingt beachten:**

- Lesen Sie zunächst den Aufgabentext gründlich durch. Klären Sie, worin die eigentliche Aufgabe besteht und verteilen Sie die Arbeit im Team sinnvoll.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben haben Sie 7 Stunden Zeit. Planen Sie unbedingt genügend Zeit (mind. 2 Stunden) für die Abschlussaufgaben ein. Auch das Notieren der Lösungen kostet viel Zeit.
- Bevor Sie mit dem Abschlussauftrag beginnen, stellen Sie einander Ihre Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor.
- In manchen Aufgabenstellung finden Sie den Auftrag "Untersuchen Sie ...". Führen Sie immer sorgfältig an, was Sie genau untersucht haben. Recherchieren Sie unter Umständen weitere/untergeordnete Fragestellungen, betrachten Sie Alternativen, gehen Sie über die einfache Bearbeitung der Aufgabenstellung hinaus. Die Ergebnisse dieser Aufgabenstellungen werden nach diesen Kriterien beurteilt.
- Wenn Sie während der Bearbeitung der Aufgaben bestimmte Methoden oder Vorgehensweisen aus vorherigen Aufgaben abändern, beschreiben Sie dann in Ihrer Ausarbeitung diese Anpassungen und begründen Sie diese auch.
- Sie dürfen für die Bearbeitung der Aufgaben Bücher und einen Computer mit Internetanschluss benutzen. Es kann sinnvoll sein, Excel oder eine andere Tabellenkalkulation zu verwenden.

### **Bestandteile Ihrer Ausarbeitung:**

- Ausarbeitungen zu den sieben Aufgaben
- Ausarbeitung zu den Abschlussaufgaben

**Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten Ihre Arbeit in digitaler Form, also möglichst als pdf-Dokument. Achten Sie bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben.**

**Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnen Sie bitte Ihre Namen und den Namen der Schule nicht in Ihrer Arbeit.**

### **Wesentliche Beurteilungskriterien sind:**

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit Ihrer Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

**Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!**

## Einleitung

Heutzutage muss man nicht mal mehr vor die Tür, wenn man einkaufen möchte: Man kann online bestellen und alle Einkäufe werden nach Hause geliefert. Auch die Schlepperei ist vorbei - man muss nur noch das Paket vom Postboten annehmen. So ein Paket ist manchmal jedoch erstaunlich groß! Wenn man beispielsweise einen Schraubenzieher bestellt, lässt die Größe des Pakets eher vermuten, dass stattdessen eine Bohrmaschine verschickt wurde. In dieser Aufgabe untersuchen wir, warum dies so ist und wie man Bestellungen möglichst effektiv einpacken kann.



## Füllgrad

Unter dem Füllgrad versteht man den Anteil (Prozentsatz) des Paketinhalts, den der Artikel ausfüllt.

Wenn ein kleiner Artikel in einem sehr großen Karton verpackt ist, dann entsteht ein großer leerer Raum: Der Karton ist mehr mit Luft (oder Füllmaterial) gefüllt als mit dem Artikel selbst. Der Füllgrad ist dann sehr niedrig.

Ist das schlimm? Ein niedriger Füllgrad erhöht natürlich die Kosten für das Verpackungsmaterial (und das Füllmaterial), er führt aber auch zu höheren Versandkosten. Denn wenn die Kartons größer als erforderlich sind, passen weniger in einen Container oder Lastwagen. Daher ist auch der Füllgrad des Containers oder Lastwagens niedriger als er sein könnte. Dadurch muss häufiger beladen, gefahren und entladen werden. Auch das ist mit höheren Kosten verbunden.

Trotzdem hat man sich beim Versandhandel dafür entschieden, nicht für jeden Artikel einen passenden Karton zu verwenden. Der Einsatz vieler verschiedener Kartons führt zu höheren Packzeiten, weil die Einpacker jeweils den geeigneten Karton suchen müssen. Zudem müssen immer sehr viele verschiedene Kartons auf Vorrat gelagert sein und das benötigt wiederum mehr Platz. Daher soll die Anzahl verschiedener Kartons, die der Versandhandel vorrätig hat, begrenzt sein.

Es stellt sich daher nun die Frage: Welche Formate müssen die Kartons haben, um einen optimalen Füllgrad für die verschiedenen Artikel zu erreichen?

In der folgenden Aufgabe betrachten wir eine vereinfachte Situation: Wir gehen davon aus, dass in jeden Karton nur ein Artikel verpackt wird. Und wir gehen davon aus, dass der optimale Versandkarton für jedes Produkt ein quaderförmiger Karton ist, der den Artikel (der sich jeweils in einem Karton des Herstellers befindet) exakt umschließt. Der Füllgrad wäre dann 100 %.

## Einstiegsaufgaben



In Amberhavn hat sich ein neuer Versandhandel angesiedelt: AmberFast. Zunächst hat AmberFast nur drei Artikel im Sortiment:

- eine Kaffeemaschine (Maße: 27 x 21 x 34 cm)
- einen Standmixer (15 x 14 x 38 cm)
- ein Handrührgerät (15 x 9 x 20 cm)

Ihr sollt euch nun auf die Suche nach einem Versandkarton machen, in den sowohl die Kaffeemaschine als auch der Standmixer als auch das Handrührgerät einzeln hineinpassen.

### Aufgabe 1

Bestimmt die Maße dieses Kartons und berechnet jeweils den Füllgrad eines solchen Kartons für die drei genannten Artikel.

AmberFast möchte einen höheren Füllgrad erreichen. Daher beschließt man, die Anzahl der Versandkartons auf zwei zu erhöhen. Jetzt stellt sich natürlich die Frage, welche Maße für diese beiden quaderförmigen Kartons am besten gewählt werden sollten, damit ein möglichst hoher Füllgrad erreicht wird.

### Aufgabe 2

Bestimmt die Maße dieser beiden Kartons und begründet, warum ihr eure Wahl der Kartonmaße für optimal haltet. Berechnet jeweils den Füllgrad dieser Kartons für die drei Artikel.

Ein Unternehmen verkauft in der Regel viele verschiedene Artikel in unterschiedlichen Mengen. Der Füllgrad eines Kartons für einen bestimmten Artikel sagt daher nicht sehr viel darüber aus, wie effizient ein Unternehmen seine Artikel verpackt. Daher benötigt man eine neue Größe, die den Füllgrad aller Artikel und aller Kartons miteinander kombiniert.

### Aufgabe 3

Überlegt euch eine Definition für einen solchen kombinierten Füllgrad (für die Kartons aus Aufgabe 2). Berechnet diesen anschließend für die folgenden drei Fälle:

- I. Alle Artikel werden gleich oft verkauft.
- II. Das Verhältnis Kaffeemaschinen : Standmixer : Handrührgeräte beträgt 1 : 2 : 5
- III. Das Verhältnis Kaffeemaschinen : Standmixer : Handrührgeräte beträgt 5 : 1 : 2

#### Aufgabe 4

Bestimmt nun für jeden der drei obigen Fälle die Maße der beiden Kartons, bei denen der kombinierte Füllgrad optimal ist.

**Ab jetzt ist mit dem Begriff "Füllgrad" immer dieser kombinierte Füllgrad gemeint.**

Nicht jeder Artikel wird gleich oft bestellt. Dies kann die Wahl der Maße der Kartons beeinflussen - wie ihr in der obigen Aufgabe bereits festgestellt habt. Es kann sein, dass ihr eure Methode, den Füllgrad zu berechnen, nach und nach angepasst habt.

#### Aufgabe 5

Beschreibt nun eure endgültige **Methode** zur Berechnung des (kombinierten) Füllgrads. Gebt dabei an, welche Teile ihr ggf. abgeändert habt.

Diese sollte so erläutert sein, dass ein beliebiger Betrieb sie gut verstehen und eure Methode tatsächlich anwenden kann. Verwendet diese Methode anschließend in allen weiteren Aufgaben.

#### Vertiefende Aufgaben

Ihr habt festgestellt, dass das Verhältnis der Bestellmengen einen Einfluss auf die optimalen Maße der Versandkartons hat.

#### Aufgabe 6

Formuliert einige allgemein gültige Regeln zur Bestimmung der Maße zweier Kartons für die drei Artikel mit dem Ziel, den optimalen Füllgrad zu erreichen.

**Tipp:** Variiert hierbei das Verhältnis der Bestellmengen, um herauszufinden, welche Kartonformate ihr jeweils benötigt.

AmberFast möchte nun neben der Kaffeemaschine, dem Standmixer und dem Handrührgerät noch einen weiteren Artikel anbieten: eine Espressomaschine mit den Maßen 38 x 29 x 45 cm.



#### Aufgabe 7

Noch immer möchte das Unternehmen mit zwei Kartons einen optimalen Füllgrad erreichen. Untersucht, ob das mit den "bereits vorhandenen Kartons" funktioniert oder ob es sinnvoller wäre, zwei andere Formate zu wählen. Findet auch heraus, ob das Verhältnis der Bestellmengen einen Einfluss hierauf hat.

## Abschlussaufgaben

AmberFast wächst weiter und bietet schließlich mehr als 20 verschiedene Artikel an: Kaffeemaschinen, Toaster, Mixer, usw. Diese Geräte sind in der beigefügten Excel-Datei zusammen mit ihren Maßen angegeben.

Um diese Artikel optimal zu verpacken, ist es auch wichtig, die richtige Wahl zu treffen. Dabei geht es nicht nur darum, die Maße der Kartons auszuwählen, sondern auch die Anzahl der verschiedenen Kartonformate, die verwendet werden sollen. Bei nur einem Format ist der gemeinsame Füllgrad vermutlich nicht sehr hoch, während bei 22 verschiedenen Formaten der Füllgrad 100 % beträgt, weil es für jeden Artikel einen passenden Karton gibt.

Es gilt also: Je weniger Kartons benötigt werden, desto besser - aber natürlich gilt auch: Je höher der Füllgrad ist, desto besser. Es müssen also Entscheidungen getroffen werden.

### Teil A:

Wir gehen nun von maximal 5 Paketformaten und gleich vielen Bestellungen pro Artikel (d.h. gleiches Verhältnis der Mengen) aus. Überlegt euch eine Strategie, wie man in diesem Fall die optimalen Maße der fünf verschiedenen Paketformate bestimmen kann. Beachtet hierbei: Es geht um die Beschreibung eurer Herangehensweise, nicht um das Ergebnis.

### Teil B:

Die Firma AmberFast möchte gerne einen Einblick in den Zusammenhang zwischen der benötigten Anzahl an Kartonformaten und dem Füllgrad erhalten, so dass sie eine vernünftige Wahl treffen kann. Hierbei können die Bestellmengen jedes Artikels natürlich verschieden sein.

Beschreibt den Zusammenhang der Anzahl an Kartonformaten mit dem kombinierten Füllgrad und mit dem Verhältnis der Bestellmengen der verschiedenen Produkte. Erstellt daraus für den Versandhändler AmberFast eine übersichtliche und für die Praxis gut handhabbare Darstellung. Das Unternehmen muss an Hand dieser Übersicht selbst über die Anzahl der Kartons und die möglichen Maße entscheiden können.

Mit anderen Worten: Ihr trifft nicht die Wahl für den Versandhändler, sondern ihr erstellt eine Übersicht, mit deren Hilfe die Leitung von AmberFast eine gut durchdachte Wahl treffen kann.

## Anhang: Artikelliste und Fotos

| Artikel des Unternehmens AmberFast |                                       |       |        |      |
|------------------------------------|---------------------------------------|-------|--------|------|
|                                    | Artikel                               | Länge | Breite | Höhe |
| 1                                  | <a href="#">Kaffeemaschine</a>        | 27    | 21     | 34   |
| 2                                  | <a href="#">Standmixer</a>            | 15    | 14     | 38   |
| 3                                  | <a href="#">Handrührgerät</a>         | 15    | 9      | 20   |
| 4                                  | <a href="#">Espressomaschine</a>      | 38    | 29     | 45   |
| 5                                  | <a href="#">Senseo-Kaffeemaschine</a> | 34    | 19     | 30   |
| 6                                  | <a href="#">Kaffeemühle</a>           | 13    | 11     | 25   |
| 7                                  | <a href="#">Stabmixer</a>             | 7     | 7      | 40   |
| 8                                  | <a href="#">Toaster</a>               | 28    | 16     | 24   |
| 9                                  | <a href="#">Toaster</a>               | 35    | 26     | 31   |
| 10                                 | <a href="#">Küchenmaschine</a>        | 23    | 19     | 36   |
| 11                                 | <a href="#">Brotbackautomat</a>       | 33    | 28     | 37   |
| 12                                 | <a href="#">Brotbackautomat</a>       | 40    | 27     | 36   |
| 13                                 | <a href="#">Staubsauger</a>           | 29    | 26     | 40   |
| 14                                 | <a href="#">Staubsauger</a>           | 33    | 30     | 105  |
| 15                                 | <a href="#">Handstaubsauger</a>       | 15    | 10     | 38   |
| 16                                 | <a href="#">Espressomaschine</a>      | 37    | 29     | 32   |
| 17                                 | <a href="#">Kaffeemaschine</a>        | 24    | 24     | 57   |
| 18                                 | <a href="#">Kaffeemaschine</a>        | 26    | 22     | 37   |
| 19                                 | <a href="#">Fleischwolf</a>           | 30    | 30     | 24   |
| 20                                 | <a href="#">Knetmaschine</a>          | 72    | 40     | 62   |
| 21                                 | <a href="#">Backofen</a>              | 55    | 34     | 38   |
| 22                                 | <a href="#">Mikrowelle</a>            | 47    | 29     | 32   |

# Fotos der Produkte

