

“Viel zu lange in der Schlange”



**Vorrundenaufgabe der 29. Alympiade
24. November 2017**

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Alympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

Dr. Ana Alboteanu-Schirner
Gymnasium Schwertstraße, Solingen, Deutschland

Eric van Dijk
Lorentz Casimir Lyceum Eindhoven

Tom Goris
Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan
Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas
Städtisches Gymnasium Hennef, Hennef, Deutschland

Kim Kaspers
Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur,
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert,
Röntgen-Gymnasium, Remscheid, Deutschland

Ruud Stolwijk
CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers
Freudenthal Instituut, Utrecht

Sekretariat:

Liesbeth Walther und Mariozee Wintermans
Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Alympiade wird **unterstützt** durch:

- Das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- Den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- Die Universitäten zu Bonn und zu Münster
- Das Ministerium für Bildung, Kultur und Wissenschaft der Niederlande
- CASIO, Amstelveen
- Texas Instruments, Utrecht

Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2017/2018

Liebe Schülerinnen und Schüler,

ihr beteiligt euch heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von euch verlangt. Diese Aufgabe der Mathematik-Olympiade besteht aus drei Teilen:

- Teil 1: Einstieg (bestehend aus den Teilen 1a und 1b mit 7 Einführungsaufgaben),
- Teil 2: Grafische Darstellung (4 Aufgaben)
- Teil 3: Anwendung (mit einer Aufgabe und einer Abschlussaufgabe)

Die Einführungsaufgaben bilden die Vorarbeit für Teil 3: Alle hierbei erzielten Ergebnisse und Einsichten sind erforderlich, um die Abschlussaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können.

Die folgenden Hinweise solltet ihr unbedingt beachten:

- Lest zunächst den ganzen Aufgabentext gründlich durch, so dass ihr einen Überblick über die zu bearbeitenden Aufgaben bekommt.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben habt ihr 7 Stunden Zeit. Plant unbedingt genügend Zeit (ca. 3 Stunden) für die Abschlussaufgabe ein. Auch das Ausformulieren und Aufschreiben der Lösungen kostet viel Zeit.
- Wenn ihr arbeitsteilig arbeitet, dann stellt einander eure Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor, bevor ihr mit der Abschlussaufgabe beginnt.
- Gebt immer an, wenn ihr bestimmte Annahmen macht und begründet diese sinnvoll.
- Bei manchen Aufgaben kann es sinnvoll sein, zunächst konkrete Beispiele durchzurechnen, um die Aufgabe besser zu durchdringen.
- Wenn ihr während der Bearbeitung der Aufgaben bestimmte Methoden oder Vorgehensweisen aus vorherigen Aufgaben abändert, beschreibt dann in eurer Ausarbeitung diese Anpassungen und begründet diese auch.
- Ihr dürft für die Bearbeitung der Aufgaben Bücher und einen Computer mit Internetanschluss benutzen. Es kann sinnvoll sein, Excel oder eine andere Tabellenkalkulation zu verwenden.

Bestandteile eurer Ausarbeitung:

- Ausarbeitung der Abschlussaufgabe
- als Beilage: die Ausarbeitungen zu den (Einstiegs-)aufgaben 1 bis 11 sowie der Analyseaufgabe

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eure Arbeit in digitaler Form als pdf-Dokument. Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit des Abschlussauftrages
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!

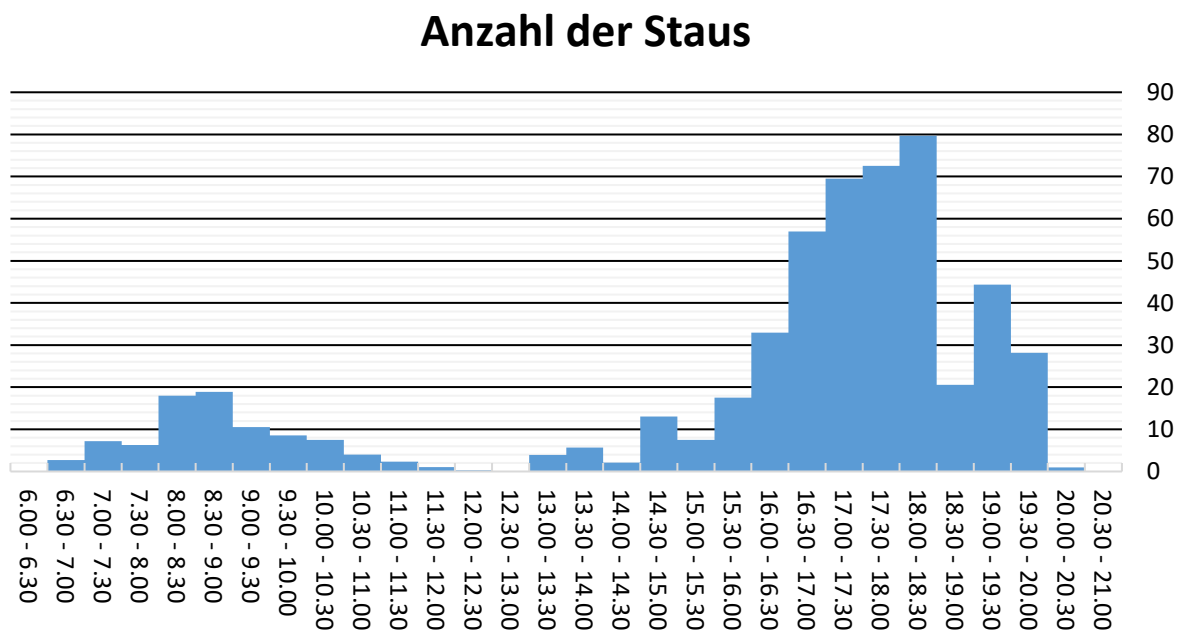
Einleitung

Staus auf der Autobahn – sie gehören inzwischen zu unserem täglichen Leid, vor allem rund um Großstädte und Ballungsgebiete. Obwohl niemand im Stau stehen möchte, entscheiden sich die meisten Leute jeden Tag aufs Neue, dies doch auf sich zu nehmen. Das führt dann zu den bekannten Meldungen im Radio, wie z.B. *“Derzeit gibt es im Sendegebiet 12 Staus mit einer Gesamtlänge von 44 Kilometern. Am Autobahnkreuz Leverkusen gibt es zähflüssigen und stockenden Verkehr auf einer Länge von 4 km.”*

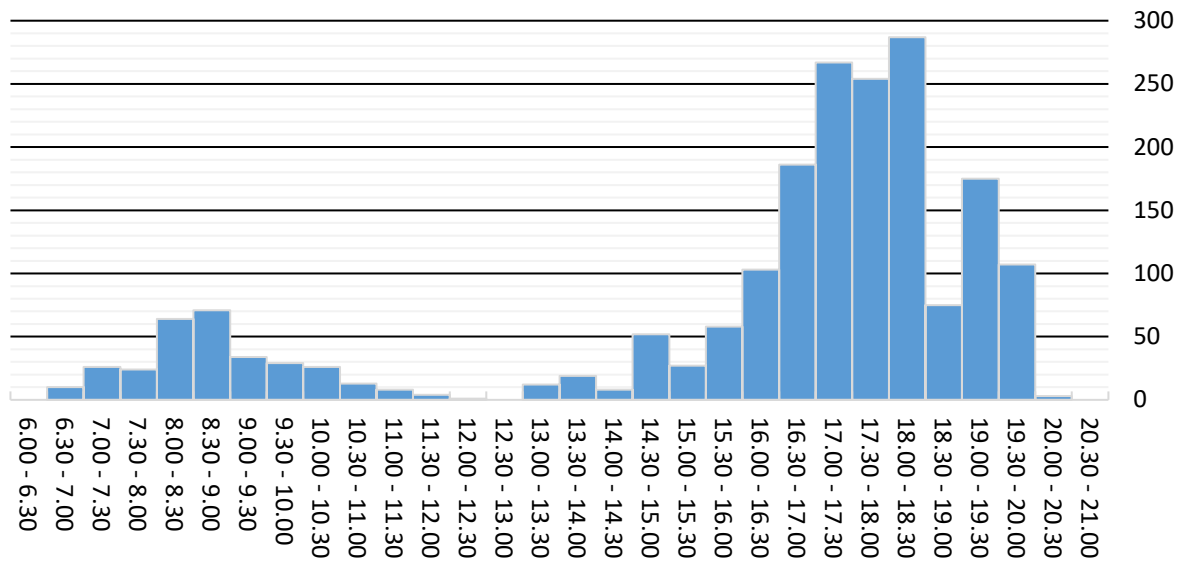
In dieser Olympiadeaufgabe untersucht ihr mit Hilfe einer Anzahl von “Fachbegriffen” das Phänomen “Stau”. In den Einstiegsaufgaben lernt ihr, mit diesen Begriffen richtig umzugehen. In der Abschlussaufgabe sollt ihr die Begriffe schließlich richtig und sinnvoll verwenden.

Teil 1a: Einstieg – Stauwirkung

Auf der Website des Verkehrsdienstes von Amberhavn findet man Daten zu den Staus in der Region. Untenstehend siehst du zwei Diagramme mit Informationen zur Anzahl der Staus und zur gesamten Staulänge in Amberhavn am 5. Oktober diesen Jahres.



Gesamte Staulänge



- Über freiwillige Staumelder, Polizeistreifen, Kameras und Hubschrauber kann man für jeden beliebigen Zeitpunkt eine präzise Angabe über die Anzahl der Staus in einem bestimmten Gebiet machen. Erläutert, wie die Angaben im ersten Diagramm aus den gemessenen Staudaten ermittelt worden sein könnten.

Jeder Stau ist anders. Einen Stau von 3 km Länge, in dem man 2 Stunden steht, erlebt man anders als einen Stau von 6 km, in dem man nur 20 Minuten steht. Die Staulänge (in km) multipliziert mit der Dauer (in min) nennt man die **Stauwirkung**.

Es gilt also: $Länge\ des\ Staus\ (km) \times Dauer\ des\ Staus\ (min) = Stauwirkung$

“Damit die Warnungen möglichst genau sind, sammelt das Unternehmen TomTom in Echtzeit anonym die Bewegungsdaten von Millionen von Navis und Mobiltelefonen, die dann an große Rechnerzentralen weitergeleitet werden. Anhand dieser laufend erhobenen Daten kann TomTom sehr genau angeben, wie lang ein Stau ist.” (RP online, 21.11.2017¹) So kann man zu jedem Zeitpunkt für ein bestimmtes Gebiet die gesamte Länge aller Staus bestimmen. Im zweiten Diagramm sind für die Zeitintervalle von jeweils 30 Minuten die Durchschnittswerte dieser Gesamtstaulänge angegeben.

- Bestimmt mit Hilfe des zweiten Diagramms die gesamte Stauwirkung in Amberhavn während der abendlichen Stoßzeit am 5. Oktober.

¹ <http://www.rp-online.de/leben/auto/echtzeitmessung-im-stau-so-funktioniert-s-aid-1.4626489>

Teil 1b: Einstieg – Wann spricht man eigentlich von einem Stau?

Wir sprechen von **freiem Verkehrsfluss**, wenn sich die Fahrzeuge ohne Verzögerung auf der Straße fortbewegen können. Der Verkehrsdienst von Amberhavn verwendet den Begriff "Stau" als Sammelbegriff für drei Arten des beeinträchtigten Verkehrsflusses:

- **zäh fließender Verkehr:** Verkehr, der sich auf einer Strecke von mindestens 2 km an keiner Stelle schneller als 50 km/h, aber durchgehend schneller als 25 km/h bewegt;
- **stillstehender Verkehr:** Verkehr, der sich auf einer Strecke von mindestens 2 km nahezu überall langsamer als 25 km/h bewegt;
- **stockender Verkehr:** Verkehr auf einer Strecke von mindestens 2 km, in dem immer wieder Passagen mit stillstehendem Verkehr vorkommen und in dem alle anderen Passagen zäh fließend sind.

Um nachzuvollziehen, welche Größen man bei der Entstehung von Staus berücksichtigen muss, betrachten wir als Beispiel eine einzelne Straße. Nachts ist die Straße fast leer und es entsteht kein Stau. Jedes Auto hat genügend Platz, um sich mit der Höchstgeschwindigkeit ohne Verzögerung fortzubewegen. Wenn mehr Autos dazukommen, dann fließt der Verkehr meist immer noch ungehindert – aber irgendwann wird der Verkehrsfluss beeinträchtigt, nämlich dann, wenn mehr Autos auf der Straße fahren als die Straße "verkraftet".

Welche Größen spielen eine Rolle, wenn man herausfinden will, wann ein Stau entsteht? Wir nennen im Folgenden einige Faktoren, die hierbei berücksichtigt werden müssen. Dabei betrachten wir einen bestimmten Straßenabschnitt zwischen zwei Begrenzungen A und B:

- **Verkehrsstärke (Q):** die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Stunde in den Straßenabschnitt bei A einfahren.
- **Geschwindigkeit (v):** die durchschnittliche Geschwindigkeit aller Fahrzeuge auf dem Straßenabschnitt zwischen A und B in km/h
- **Verkehrsdichte (D):** die Anzahl der Fahrzeuge, die sich pro Kilometer auf dem bestimmten Streckenabschnitt zwischen A und B befindet.

3. Wenn alle Autos auf der Strecke zwischen A und B mit derselben Geschwindigkeit v fahren und in jedem Moment die Zahl der Autos, die auf den Streckenabschnitt einfahren, genauso groß ist, wie die Zahl der Autos, die den Streckenabschnitt

verlassen, dann gilt: $\frac{Q}{D} = v$

Beweist die Gültigkeit der Formel.

Gerade in Stausituationen sind die Voraussetzungen der Formel nicht erfüllt. In Stausituationen fahren nicht alle Autos mit derselben Geschwindigkeit und es fahren nicht in jedem Moment gleich viele Autos in den Straßenabschnitt ein, wie auch wieder herausfahren. Daher gilt die Formel in einer solchen Situation im allgemeinen nicht.

4. Beschreibt in einem Beispiel eine Stausituation auf einem Straßenabschnitt, so dass die Voraussetzungen der Formel aus 3. nicht erfüllt sind und die Formel nicht gilt. Belegt eure Behauptungen in dem Beispiel durch Rechnungen.

Wenn der Straßenabschnitt zwischen A und B sehr kurz ist, dann sind die Voraussetzungen der Formel aus 3. näherungsweise erfüllt. Ihr dürft daher im weiteren Verlauf der Aufgabe diese Formel für kurze Straßenabschnitte verwenden.

Um sich noch besser an die neuen Begriffe zu gewöhnen, werden wir erst einmal ein bisschen mit ihnen rechnen. Wir nehmen hierfür als Beispiel einen kurzen Straßenabschnitt von 200 m Länge von A nach B mit einer Fahrbahn in jeder Richtung. Diese Straße soll eine **Kapazität** von 2200 Fahrzeugen pro Stunde haben. Das bedeutet, dass maximal 2200 Autos pro Stunde bei A auf den Abschnitt von A nach B einfahren können, ohne dass der freie Verkehrsfluss behindert wird.

5. Wir setzen zunächst voraus, dass jedes Auto auf der Straße mit einer Geschwindigkeit von genau 120 km/h fährt. Berechnet, wie viel Platz jedes Auto durchschnittlich zur Verfügung hat, wenn 2000 Autos pro Stunde bei A auf den Abschnitt von A nach B einfahren (also $Q = 2000$) und gleichzeitig genauso viele Autos den Abschnitt B wieder verlassen.
6. In manchen Situationen fahren viele Autofahrer zu dicht auf. Wir gehen in dieser Aufgabe von der unrealistischen Situation aus, dass die Autos nahezu "Stoßstange an Stoßstange" fahren. Macht eine Annahme für die Länge eines (durchschnittlichen) Autos und berechnet damit die durchschnittliche Geschwindigkeit auf der Straße von A nach B, wenn die Verkehrsstärke von 2200 erreicht wird.
7. Bei zu hoher Verkehrsstärke kommt es zum Stau. Der Wert von 2200 Autos pro Stunde ist mit Hilfe von komplexen Überlegungen ermittelt worden. Ermittelt selber einen Wert für die Verkehrsstärke auf der Straße von A nach B, der unter realistischen Annahmen nicht mehr erreicht werden kann. Begründet eure Ergebnisse rechnerisch.

Teil 2: Grafische Darstellung

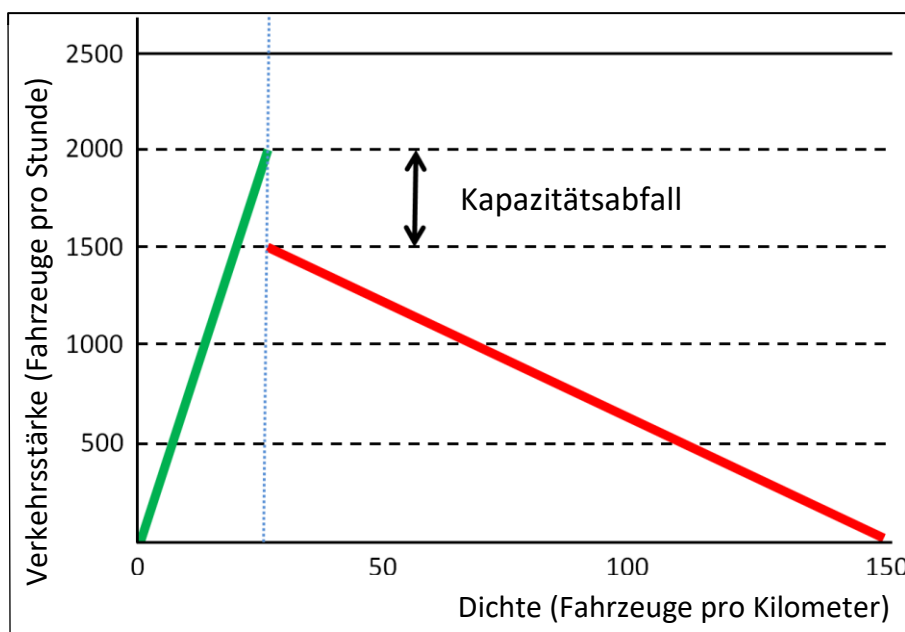
Man kann die Kapazität einer Straße nicht nur für "ungehinderten Verkehrsfluss" definieren, sondern auch für die Situation bei Stau: In diesem Fall sind die Dichte und die Durchschnittsgeschwindigkeit durch die gegebene Verkehrsstärke bestimmt. Eine höhere Verkehrsstärke ist bei der gegebenen Dichte nicht möglich, weil die Geschwindigkeit nicht erhöht werden kann. Bei Stau gibt es zu gegebener Dichte bzw. Durchschnittsgeschwindigkeit also nur eine Verkehrsstärke und dies ist die Kapazität. Dies ist in der untenstehenden Abbildung im rechten Ast zu erkennen.

Auch in den folgenden Überlegungen betrachten wir so kurze Straßenabschnitte, dass die Formel aus Aufgabe 3 näherungsweise verwendet werden darf.

In dieser Abbildung seht ihr eine lineare Näherung des Zusammenhangs zwischen der Dichte und der Verkehrsstärke.

Der **linke Ast** des Graphen stellt den Zusammenhang dar, wenn der Verkehrsfluss ungehindert ist. Die Geschwindigkeit ist dann konstant und von links nach rechts nehmen sowohl die Dichte als auch die Verkehrsstärke zu.

Der **rechte Ast** des Graphen verdeutlicht den Zusammenhang, wenn es zur Staubildung und Behinderung im Verkehrsfluss kommt, wobei von links nach rechts die Dichte zunimmt und die Geschwindigkeit abnimmt.

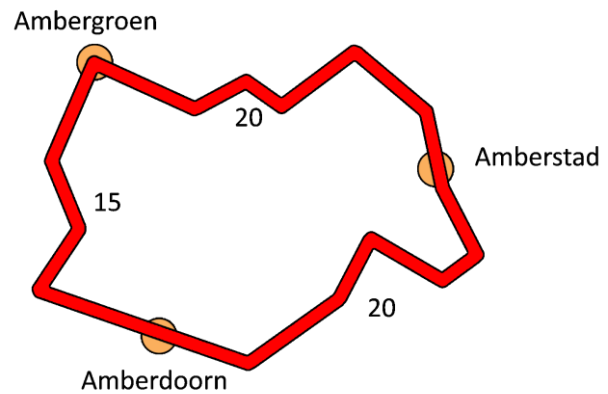


Im Graphen kann man erkennen, dass zu vielen Werten der Verkehrsstärke zwei verschiedene Werte für die Dichte gehören: einen für den "ungehinderten Verkehrsfluss" und einen für den Fall eines "Staus". Zu jedem Wert der Dichte gehört dann auch eine (unterschiedliche) Geschwindigkeit. Mit Hilfe der Beziehung zwischen Geschwindigkeit, Dichte und Verkehrsstärke aus Aufgabe 4 kann man den Graphen umwandeln in andere Graphen, die die Zusammenhänge zwischen den anderen Größen (z.B. zwischen der Dichte und der Geschwindigkeit) darstellen.

8. Im Graphen kann man erkennen, dass bei einer Dichte von 25 Fahrzeugen pro km die Verkehrsstärke sprunghaft abnimmt. Berechnet die zugehörigen Geschwindigkeiten und beschreibt möglichst genau die Situation auf der Straße, die bei einem "Kapazitätsabfall" entsteht.
9. Erläutert, wie man aus dem Diagramm den Wert der Kapazität bei ungehindertem Verkehrsfluss entnehmen kann. Begründet eure Vorgehensweise.
10. Wandelt den gegebenen Graphen in einen anderen Graphen um, der den Zusammenhang zwischen der Dichte und der Geschwindigkeit darstellt.
11. Wandelt den gegebenen Graphen in einen anderen Graphen um, der den Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Verkehrsstärke darstellt.

Teil 3: Anwendung

Nebenstehend seht ihr ein Wegenetz der Region Amberhavn mit den jeweiligen Entfernungen zwischen den Städten Ambergroen, Amberstad und Amberdoorn in km.



In der untenstehenden Tabelle könnt ihr die Anzahl der Autos ablesen, die an einem Wochentag während der morgendlichen bzw. abendlichen Stoßzeit zwischen

den drei Städten fahren. Wir gehen davon aus, dass die Straßen in jeder Richtung einspurig sind und die Höchstgeschwindigkeit 80 km/h beträgt.

Morgendliche Stoßzeit

Von\nach	Ambergroen	Amberstad	Amberdoorn
Ambergroen		2000	3000
Amberstad	1500		1500
Amberdoorn	4000	1200	

Abendliche Stoßzeit

Von\nach	Ambergroen	Amberstad	Amberdoorn
Ambergroen		5000	6000
Amberstad	4000		1500
Amberdoorn	1000	1800	

Aufgabe: Analysiert die Engpässe in diesem Wegenetz

Untersucht, wo und zu welchen Zeiten in diesem Wegenetz die größte Wahrscheinlichkeit besteht, dass der Verkehr stockt und es zu Verzögerungen kommt. Erklärt, wie ihr den Verkehrsfluss verbessern könnt. Ihr dürft dabei bis zu 30 km zusätzliche Straßen bauen. Verwendet hierbei die Diagramme aus den Einführungsaufgaben, um die Anzahl der Autos abzuschätzen, die zu einem bestimmten Zeitpunkt eine bestimmte Stelle passieren. Ermittelt dann, wie groß die Verkehrsstärke und Dichte der (jetzigen) Straßen ist und findet heraus, ob es zu Staubildung kommt. Benutzt diese Analyse auch als Grundlage für die Abschlussaufgabe.

Abschlussaufgabe: Zeitungsartikel

Schreibt einen Zeitungsartikel über die Stauproblematik in diesem Wegenetz. Verwendet dabei die Graphen aus dem Teil "Grafische Darstellung", wobei ihr diese so erläutert, dass der Leser verstehen kann, was man aus den Graphen ablesen kann. Verwendet auch in jedem Fall den Begriff "Stauwirkung". Zusätzlich gebt ihr mindestens eine mögliche Lösung für die Stauproblematik in diesem Netz an (mit Hilfe zusätzlicher Straßen). Begründet eure Lösung(en).