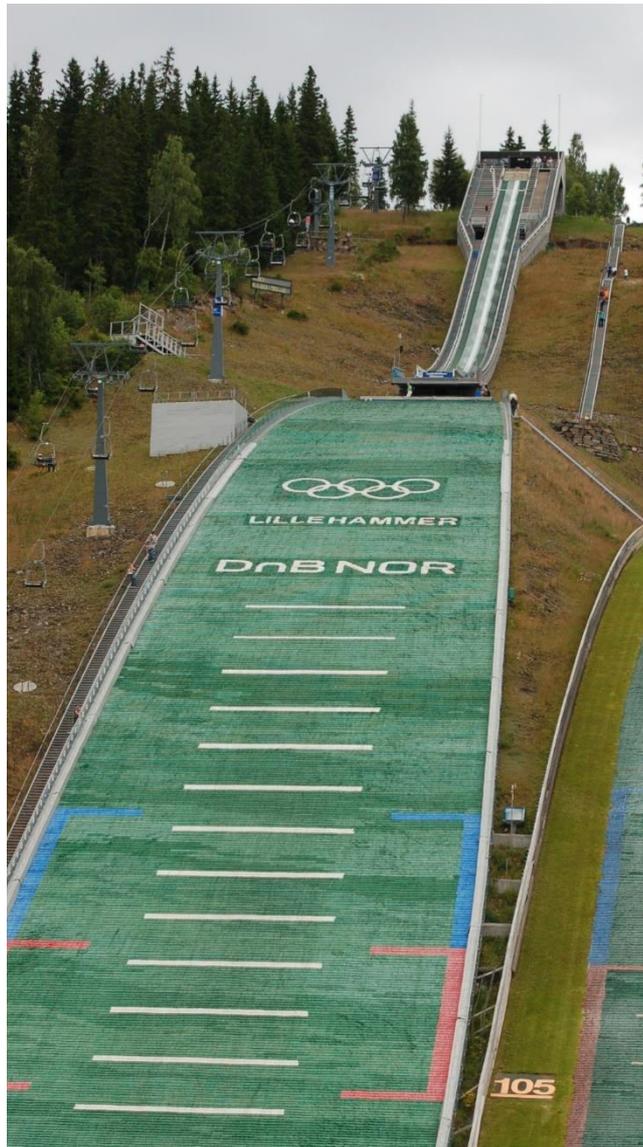


Mit Schwung in den Sprung



**Aufgabe der Vorrunde
der 32. Mathematik Olympiade
20. November 2020**

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Impressum

Die Mathematik-Alympiade wird vom Freudenthal Institut, Universität Utrecht, ausgerichtet.

Die Kommission der Alympiade ist für die Organisation des Wettbewerbs und die Erstellung der Aufgaben verantwortlich.

Die **Mitglieder der Kommission** sind:

Marcel Daems

Gymnasium Sorghvliet, Den Haag

Eric van Dijk

Lorentz Casimir Lyceum, Eindhoven

Tom Goris

Fontys Lerarenopleiding, Tilburg

Dédé de Haan

Freudenthal Instituut, Utrecht & NHL Hogeschool, Leeuwarden

Senta Haas

Städtisches Gymnasium Hennef, Deutschland

Kim Kaspers

Murmellius Gymnasium, Alkmaar

Johan van de Leur

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Matthias Lippert

Bezirksregierung Köln, Deutschland

Ruud Stolwijk

CITO, Arnhem & Vrijeschool Zutphen VO

Monica Wijers

Freudenthal Instituut, Utrecht

Sekretariat:

Mariozee Wintermans

Freudenthal Instituut, Utrecht

Die Alympiade wird **unterstützt** durch:

- das Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen
- den Landesverband Mathematikwettbewerbe in Nordrhein-Westfalen
- die Universitäten zu Bonn und zu Münster

Hinweise für die Teams zu den Aufgaben der Vorrunde 2020/2021

Liebe Schülerinnen und Schüler,

ihr beteiligt euch heute an einem anspruchsvollen und spannenden Wettbewerb, der konzentriertes, gut strukturiertes und teamorientiertes Arbeiten von euch verlangt. Diese Aufgabe der Mathematik-Alympiade besteht aus sechs Einstiegsaufgaben und einer Hauptaufgabe. **Die Einstiegsaufgaben bilden die Vorarbeit für die Hauptaufgabe:** Die hierbei erzielten Ergebnisse und Einsichten sind erforderlich, um die Hauptaufgabe erfolgreich bearbeiten zu können.

Die folgenden Hinweise solltet ihr unbedingt beachten:

- Zu dieser Aufgabe gehören fünf Anlagen.
- Lest zunächst den ganzen Aufgabentext gründlich durch, so dass ihr einen Überblick über die zu bearbeitenden Aufgaben bekommt.
- Die Einstiegsaufgaben dienen als Vorüberlegungen zur **Hauptaufgabe**.
- Für die Bearbeitung der Aufgaben habt ihr 7 Stunden Zeit. **Plant unbedingt genügend Zeit (ca. 4 Stunden) für die Hauptaufgabe ein.** Auch das Ausformulieren und Aufschreiben der Lösungen kostet viel Zeit.
- Wenn ihr arbeitsteilig arbeitet, dann stellt einander eure Teilergebnisse zu den Voruntersuchungen vor, bevor ihr mit der Hauptaufgabe beginnt.
- Gebt immer an, wenn ihr bestimmte Annahmen macht und begründet diese sinnvoll.
- Wenn ihr während der Bearbeitung der Aufgaben bestimmte Methoden oder Vorgehensweisen aus vorherigen Aufgaben abändert, beschreibt dann in eurer Ausarbeitung diese Anpassungen und begründet diese auch.
- Bei der Bearbeitung der Aufgaben kann das Internet hilfreich sein. Notiert verwendete Quellen in euren Aufzeichnungen.

Was ihr abgeben müsst:

- die Ausarbeitung der **Hauptaufgabe**
- **als Anlage** die Ausarbeitungen zu den Einstiegsaufgaben 1 bis 6, sofern diese Überlegungen in die Hauptaufgabe mit eingeflossen sind

Die beurteilenden Lehrerinnen und Lehrer erhalten eure Arbeit in digitaler Form als pdf-Dokument. Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

Wesentliche Beurteilungskriterien sind:

- Lesbarkeit und Verständlichkeit der Ausarbeitungen zur Hauptaufgabe
- Vollständigkeit der Arbeit
- kreativer, sinnvoller, richtiger und geschickter Einsatz von Mathematik
- schlüssige Argumentationen und sinnvolle Begründungen von getroffenen Entscheidungen (Hierbei kann Realitätsbezug von Bedeutung sein.)
- Tiefgang der Arbeit: Wie gründlich wurden die einzelnen Punkte ausgearbeitet?
- Gestaltung der Arbeit: Form, Struktur, Sprache, Gebrauch und Funktion der Anlagen, Einsatz von Diagrammen, Tabellen, Zeichnungen, usw.

Viel Spaß und Erfolg bei der Bearbeitung der Aufgabe!

Einleitung

Skispringen ist eine Wintersportart, bei der die Springer auf Skiern von einer Schanze springen. Ziel dabei ist es, so weit wie möglich, aber auch so schön wie möglich zu springen. Die internationale Vereinigung des Skispringens ist die FIS. Dieser Sport ist vor allem in Skandinavien, den Alpenländern, Deutschland, Polen, Tschechien und Japan populär [Wikipedia].

Die Stadt Amherst hat beschlossen, ab dem kommenden Jahr ein eigenes Schanzenturnier auszutragen. Um die Ausgestaltung des Turniers wird noch heiß diskutiert. In diesem Wettbewerb werdet ihr in Konkurrenz mit vielen anderen Experten mit der Ausarbeitung eines Turnierkonzepts beauftragt werden. Zur Vorbereitung für diesen Auftrag sollt ihr euch mit bekannten Konzepten von Schanzenturnieren befassen. Dies geschieht in den Einstiegsaufgaben.

In allen großen Schanzenturnieren geht es ganz zentral um die Punktevergabe beim Skispringen. Bis 2010 spielten für die Bewertung eines Sprungs die folgenden beiden Kriterien eine Rolle:

- die gesprungene Weite
Erreicht ein Springer bei seinem Sprung den sog. K-Punkt der Schanze, so erhält er 60 Punkte. Für jeden weiter gesprungenen Meter erhält er Zusatzpunkte, springt er nicht so weit wie der K-Punkt, so werden Punkte abgezogen. Der K-Punkt unterscheidet sich von Schanze zu Schanze und wird in halben Metern genau angegeben.
- die Jurypunkte
Es gibt fünf Punktrichter, die jeweils maximal 20 Punkte für den Stil und die "Eleganz" des Sprunges geben können. Von den fünf Wertungsnoten wird die beste und die schlechteste gestrichen, so dass es maximal 60 Jurypunkte geben kann. Diese Noten werden auf halbe Punkte genau gegeben.

Einstiegsaufgabe 1

Bei der Schanze im österreichischen Bischofshofen liegt der K-Punkt bei 125 m. Ein Springer springt 143,0 m und erhält von der Jury die folgenden Noten: 19,0 - 19,0 - 19,0 - 19,0 - 18,5. Er erhält für den Sprung insgesamt 149,4 Punkte. Wie viele Punkte erhält er offensichtlich pro gesprungenen Meter, den er weiter als der K-Punkt springt?

Einstiegsaufgabe 2

In der folgenden Tabelle seht ihr die Ergebnisse von fünf Teilnehmern eines Skispringens mit der Sprungweite und den Noten der 5 Punktrichter. Die Anzahl der Punkte, die man pro Meter erhält, wenn man weiter als der K-Punkt springt, nennen wir p . Unsere Schanze hat einen K-Punkt von 120 m und es gilt: $p = 1,6$.

Teilnehmer	Sprungweite	A	B	C	D	E
Gorisch	130.0	18.5	18.5	18.5	18.5	19.0
Lippertz	133.0	16.0	15.5	16.0	14.5	16.0
Haasch	129.0	18.0	18.5	18.0	18.0	18.5

Birkhoff	128.0	18.0	17.5	18.5	18.0	17.5
Polzner	131.0	17.5	13.0	18.0	17.0	17.0

Ermittelt den Ausgang dieses Wettkampfes mit Hilfe der Tabelle.

Einstiegsaufgabe 3

Wie in der Wettkampfwertung zu sehen ist, hat die Jury einen großen Einfluss auf das Gesamtergebnis des einzelnen Springers.

Erläutert, welchen Wert ihr für p wählen würdet, um den Einfluss der Jury in ein besseres Verhältnis zur Weite des Sprungs zu setzen.

Der Einfluss des Windes

Beim Skispringen spielt der Wind eine große Rolle. Hat der Springer Gegenwind, so kann er länger auf einem "Luftpolster" in der Luft bleiben als wenn er Rückenwind hat. Und natürlich kann sich der Wind im Verlauf eines Wettkampfs ändern, so dass die Springer unterschiedliche Bedingungen haben und der Wettkampf nicht mehr fair ist. Aus diesem Grund wurde im Jahr 2010 der Windfaktor eingeführt. Diese Korrektur sorgt für zusätzliche Punkte, wenn der Wind für den Springer ungünstig ist („Rückenwind, positive Windgeschwindigkeit“) und für Punktabzug, wenn der Wind sehr günstig ist („Gegenwind, negative Windgeschwindigkeit“).

Der Windfaktor wird wie folgt berechnet:

Zunächst wird mit Hilfe der Windgeschwindigkeiten an mehreren Stellen entlang der Schanze und des Aufsprunghügels (auf dem die Springer landen) eine durchschnittliche Geschwindigkeit (in m/s) berechnet. Diese wird anschließend mit einer festgelegten Konstante g multipliziert. Diese Zahl g wird aus den individuellen Gegebenheiten der Schanze ermittelt.

Für unser Beispiel soll gelten: $g = 5$.

Einstiegsaufgabe 4

Ihr seht hier nochmals die Ergebnisse des oben genannten Wettkampfs, diesmal jedoch ergänzt durch die mittlere Windgeschwindigkeit bei den jeweiligen Sprüngen:

Teilnehmer	Sprungweite	A	B	C	D	E	Wind (in m/s)
Gorisch	130.0	18.5	18.5	18.5	18.5	19.0	-1,5
Lippertz	133.0	16.0	15.5	16.0	14.5	16.0	+1,1
Haasch	129.0	18.0	18.5	18.0	18.0	18.5	+0,3
Birkhoff	128.0	18.0	17.5	18.5	18.0	17.5	-0,9
Polzner	131.0	17.5	13.0	18.0	17.0	17.0	-1,8

Untersucht, inwieweit sich der Ausgang des Wettkampfs aus Aufgabe 2 durch die Berücksichtigung des Windfaktors ändert.

Einstiegsaufgabe 5

Erläutert, welche Möglichkeit der Wertung eines Skisprungwettkampfs ihr am besten findet, wenn ihr die bisherigen Faktoren (Sprungweite, Jurywertung, Windfaktor) betrachtet.

Erläutert auch, ob ihr noch weitere Kriterien hinzuziehen würdet. Falls ja, beschreibt diese Kriterien und begründet eure Entscheidung.

Punkte beim Weltcup

Während der gesamten Skisprungsaison wird eine Vielzahl an Wettbewerben durchgeführt, die zum Weltcup zählen. Bei jedem dieser Wettbewerbe wird das Ergebnis mit Hilfe der oben genannten Punktezahl ermittelt. Anschließend erhalten die 30 besten Springer Weltcuppunkte gemäß der folgenden Tabelle:

1. Platz	2. Platz	3. Platz	4. Platz	5. Platz	6. Platz	7. Platz	8. Platz	9. Platz	10. Platz
100	80	60	50	45	40	36	32	29	26
11. Platz	12. Platz	13. Platz	14. Platz	15. Platz	16. Platz	17. Platz	18. Platz	19. Platz	20. Platz
24	22	20	18	16	15	14	13	12	11
21. Platz	22. Platz	23. Platz	24. Platz	25. Platz	26. Platz	27. Platz	28. Platz	29. Platz	30. Platz
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1

Am Ende der gesamten Saison erhält derjenige Springer, der insgesamt die höchste Punktzahl bei allen Springen zusammen erzielt hat, den Weltcuppokal.

Die Vierschanzentournee

Rund um den Jahreswechsel finden in jedem Jahr vier besondere Skispringen statt, die zusammen die sog. Vierschanzentournee bilden. Diese vier Wettkämpfe finden nacheinander in Oberstdorf, Garmisch-Partenkirchen, Innsbruck und Bischofshofen statt. Die Ergebnisse der vier Springen sowie das Gesamtergebnis der letzten Vierschanzentournee 2019/20 findet ihr als Anlage.

Bei den Springen der Vierschanzentournee wird ein KO-System eingesetzt, um in der ersten Runde die 30 Teilnehmer für den zweiten Sprung auszuwählen. Dies läuft wie folgt ab:

Am Tag vor dem Wettkampf findet ein Qualifikationsspringen statt. Die besten 50 Springer dieser Qualifikation springen beim 1. Springen am nächsten Tag "gegeneinander". Der beste der Qualifikation springt gegen den 50., der 2. gegen den 49. usw. Der Sieger jedes Duells ist automatisch für das 2. Springen qualifiziert. Zusätzlich dürfen auch noch die besten fünf Verlierer (Lucky Loser) an der zweiten Runde teilnehmen. Hierdurch werden 30 Springer für das finale Springen selektiert. Die Punkte der ersten Runde und der Finalrunde (bei der die Springer wieder nacheinander

von Platz 30 bis Platz 1 springen) werden addiert und entscheiden über das Endergebnis des Springens. Beide Springen finden am selben Tag statt.

Eine Besonderheit beim Skispringen ist noch das sog. "Gate", d.h. der Balken, von dem der Springer losfährt. Dieser kann je nach Gegebenheiten von der Jury höher oder niedriger platziert werden. Um daraus resultierende ungleiche Bedingungen für die Springer auszugleichen, werden auch dafür Punkte vergeben. Diese Punkte sind ebenfalls in der Tabelle vermerkt, spielen aber für unsere Aufgabe keine Rolle.

Der Gewinner der Vierschanzentournee ist derjenige, der bei allen vier Wettkämpfen zusammen am meisten Punkte erzielt. Wenn die Vierschanzentournee allerdings als "Mini-Weltcup" betrachtet werden würde, dann wäre das Resultat wohl ein ganz anderes.

Einstiegsaufgabe 6

Erstellt das Ranking der neuen Top 10 der Vierschanzentournee 2019/20, wenn hierbei die Punktezahl des Weltcups (s. obige Tabelle) verwendet worden wäre.

Welche Leistungen werden im Vergleich zur ursprünglichen Wertung bei der Weltcupwertung bevorzugt? Verdeutlicht eure These anhand eines Beispiels und begründet sie.

Hauptaufgabe

Die Stadt Amherhavn möchte ein eigenes Skisprungturnier organisieren. Um sich von anderen Skisprungstädten abzuheben, hat der Gemeinderat in Zusammenarbeit mit dem Organisationskomitee beschlossen, dass das Turnier ein neues, bisher noch nicht dagewesenes Element haben muss.

Natürlich gibt es Randbedingungen, die das Turnier einhalten muss:

- Das Turnier dauert drei Tage.
- Nur für 30 Teilnehmer können zwei Springen an einem Tag durchgeführt werden.
- Da es sich um ein neues Turnier handelt, rechnen die Veranstalter mit ca. 40 Teilnehmern.
- Das Gate kann nicht verändert werden, sondern wird vor dem Springen von der Jury festgelegt.
- Es soll ein echter Wettkampf stattfinden, d.h. für die Ermittlung des Endergebnisses soll vor allem die sportliche Leistung der Springer ausschlaggebend sein.
- Es muss berücksichtigt werden, dass viele erfahrene Punktrichter sehr interessiert an diesem neuen Turnier sind.

Das Organisationskomitee hat bereits ein paar Vorschläge erarbeitet, die das Turnier für die Sportler, die Zuschauer und die Jury attraktiv machen könnten:

- 1) ein (Länder)Teamklassement
- 2) das Streichen des schlechtesten Sprungs
- 3) eine maximale Anzahl von Springern aus einem Land
- 4) nach Möglichkeit Teilnehmer aus vielen verschiedenen Ländern
- 5) Nachwuchsspringer dürfen häufiger springen als erfahrene Springer
- 6) (Ihr habt bestimmt noch andere gute Ideen!)

Ihr sollt in beratender Funktion einen Vorschlag für ein solches Turnier erarbeiten. Das Turnier muss die vorgegebenen Rahmenbedingungen erfüllen, es soll aber auch besonders unterhaltsam und spannend werden und gleichzeitig sollen die Leistungen der Springer in fairer Weise durch die Platzierungen gewürdigt werden. Ihr könnt die Vorschläge des Organisationskomitees einarbeiten, aber auch neue Ideen formulieren. Euer Entwurf für das Turnier muss in einem Bericht festgehalten und dem Gemeinderat von Amherhavn präsentiert werden.

Euer ausführlicher Bericht enthält also

- eine genaue Beschreibung des Turnierablaufs, in der klar belegt wird, dass alle Rahmenbedingungen eingehalten werden,
- eine Erläuterung, inwiefern und in welchem Ausmaß Zufall, also Glück den Turnierverlauf bestimmt und dadurch für Spannung und Unterhaltung sorgt,
- eine umfassende Begründung dafür, dass sportliche Leistungen durch die abschließende Platzierung in eurem Turnier fair gewürdigt werden. Geht dabei insbesondere auf die Wettkampfregeln und die Bewertungskriterien ein, die ihr verwendet und
- zur besseren Verständlichkeit eurer Argumente die Beschreibung eines möglichen konkreten Turnierverlaufs, für den ihr geeignete Sprungergebnisse aus den Tabellen der Vierschanzentournee (s. Anhang) verwendet.

Der Bericht ist die Ausarbeitung, die ihr als Ergebnis eurer heutigen Teamarbeit einreicht. In euren Ausführungen verwendet ihr natürlich eure Ergebnisse und Argumente aus den Einstiegsaufgaben.