

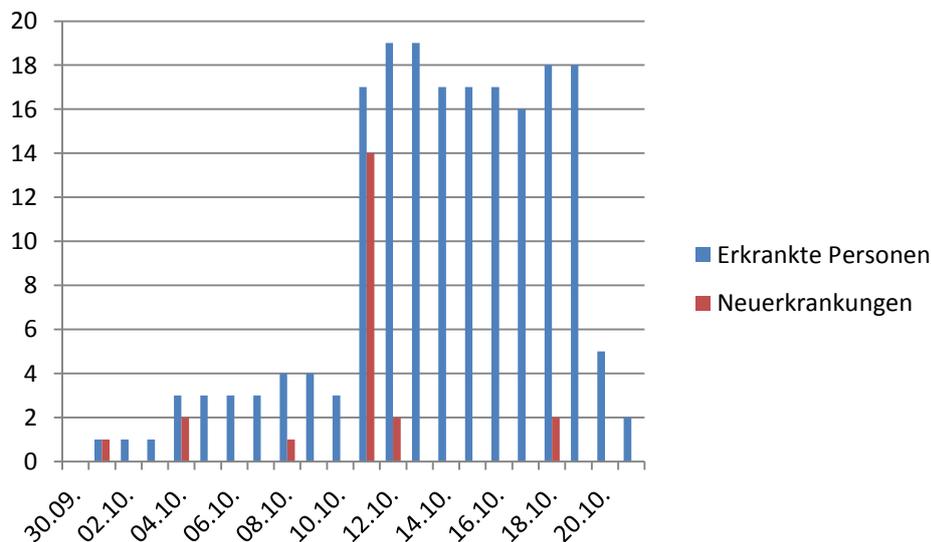
Aufgabe 1

Um die Grippewelle darstellen zu können, ist es nötig, einige Annahmen zu treffen:

1. Die Inkubationszeit beträgt, wenn im Text nicht anders angegeben vier Tage (Rechnung siehe Aufgabe 2) → Eric und Lisbeth werden am 14.10 infiziert, die Krankheit bricht also am 18.10 aus.
2. Die Erkrankten genesen, wenn nicht anders angegeben nach 9 Tagen (Vergleiche Tom, Marcel und Matthias).
3. Bei Senta bricht die Grippe am gleichen Tag aus wie bei Matthias, denn sie infizieren sich beide am 30. September und sind am 14. Oktober wieder gesund.
4. Ruud erkrankt am 8. oder 9. Oktober, wir wählen den 8., da dann bereits fünf Tage Inkubationszeit verstrichen sind.
5. Dédé und Kim erkrankten zwischen dem 11. Und 12. Oktober, wir legen fest, dass eine am 11. Erkrankt und die andere am 12.
6. Am 14. Oktober sind $25-8=17$ Vereinsmitglieder krank, aus den Angaben im Text ergibt sich, dass 13 unbekannte Vereinsmitglieder bis zum 14 Oktober erkranken müssen. Wir nehmen an, dass diese sich am 7. Oktober bei der Tour anstecken, an der „alle restlichen Vereinsmitglieder“ mitgefahren sind, da sie am 21. Oktober wieder gesund sind und an der Tour teilnehmen. Sie genesen am 20. Oktober (Annahme 2).

Auf Grundlage der Informationen des Textes und mit Hilfe der oben genannten Annahmen, lässt sich ein Säulendiagramm erstellen, welches die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag, sowie die Anzahl der kranken Personen pro Tag abbildet.

Anzahl der erkrankten und neu erkrankten Mitglieder des Fahrradvereins



Aufgabe 2

Die Inkubationszeit haben wir auf Basis der Angaben über Marcells(2 Tage Inkubationszeit(TI)), Matthias(4 TI), Dédés(4-5 TI), Kims(4-5 TI) und Ruuds(5-6 TI) Krankheitsverläufen berechnet.

$$\frac{2 + 4 + 5.5 + 4.5 + 4.5}{5} = 4.1$$

Die durchschnittliche Inkubationszeit beträgt etwa vier Tage.

Die Dauer der Erkrankung haben wir anhand von Marcells(max. 9 Tage), Toms (9 Tage), Matthias(max. 10 Tage) Krankheitsdauer auf neun Tage geschätzt.

Monika ist immun, da sie am 30. September mit dem Erreger in Kontakt kommt und am 7. Oktober bei der Radtour mitfährt. Der Zeitraum ist zu lang für die Inkubationszeit und zu kurz für einen Grippeverlauf.

Jaques ist ebenfalls immun, da er am 2. Oktober mit den Erregern in Kontakt gekommen ist jedoch ist er am 7. Oktober gesund, außerdem erhalten wir keine Informationen darüber, ob er im betrachteten Zeitraum erkrankt.

Nach unserer Annahme von 9 Tagen Krankheitsdauer sind Senta und Matthias am 14. Oktober wieder gesund, jedoch stecken sie an diesem Tag Eric und Liesbeth an, welche zu den „vier anderen“ gehören müssen. Tom steckt am 10. Oktober Marcel an, einen Tag nachdem er wieder „ganz der Alte“ war. Somit besteht mindestens zwei Tage nach Abklingen der Symptome noch Ansteckungsgefahr.

Da die Vereinsmitglieder bereits während der Inkubationszeit ansteckend sind (Ruud steckt 1-2 Tage bevor sie „mit Grippe im Bett“ liegt Dédé und Kim an), ergibt sich eine Zeit von mind. 1+9+2=12 Tagen, in denen die infizierte Person ansteckend ist.

Einstiegsaufgabe Teil B

Aufgabe 3:

Personen erkranken stets am Folgetag nach dem Kontakt mit einer kranken Person

Szenario 1:

K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K

Alle K gleicher Farbe stellen neue Erkrankungen an einem Tag dar.

Es gibt zehn Farben, also sind am zehnten Tag alle erkrankt, wenn Farbe schwarz die Erkrankungen am ersten Tag darstellen

Szenario 2:

K	K	K	I	K	K	K	K	K	I
K	I	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
I	K	K	K	I	I	I	K	K	K
K	K	I	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
K	K	K	K	K	K	K	K	I	K
K	K	K	K	K	K	K	K	K	K
I	K	K	K	K	K	K	K	K	K

Es gibt neun Farben, also sind am neunten Tag alle erkrankt, wenn schwarz die Erkrankungen am ersten Tag darstellen

Szenario 3:

I	I	I	I	I	I	I	N.E	I	I
I	N.E	I	I	I	I	I	I	I	I
I	I	K	K	I	I	I	I	I	I
I	I	I	I	N.E	I	I	I	I	I
I	I	I	N.E	I	K	I	I	I	I
I	I	I	I	I	K	I	I	I	I
N.E	I	I	I	I	I	I	I	N.E	I
I	I	I	I	I	I	N.E	I	I	N.E
I	I	N.E	I	I	I	I	I	I	I
I	N.E	I	I	I	I	I	I	I	I

N.E sind Personen, die nur immune Personen als Nachbarn hat (nur mit immunen Personen in Kontakt sind), also nicht krankwerden können. Sie sind Nicht Empfänglich (->N.E).

Nach einem Tag sind alle Personen erkrankt, die erkranken können.

Aufgabe 4

Die Personen bewegen sich nicht.

Szenario 1

8% geimpft

		i							
	i	k	i						
		i							
					i				
				i	k	i			
					i				

Wenn die Kranken „isoliert“ werden, reicht es, nur einen geringen Anteil der Bevölkerung zu Impfen.

Szenario 2

50% geimpft

i	NE								
NE	i								
i	NE								
NE	i	k	i	NE	i	NE	l	NE	i
i	NE								
NE	i	NE	i	NE	i	NE	l	NE	i
i	NE	i	NE	i	k	i	NE	l	NE
NE	i	NE	i	NE	i	NE	l	NE	l
i	NE	i	NE	i	NE	i	NE	l	NE
NE	i								

Mit einem Impfanteil von 50% kann bei dieser Anordnung sichergestellt werden, dass es keine Neuerkrankungen gibt.

50% Impfanteil mit zufälliger Anordnung:

i	i	NE	NE	i	NE	i	i	i	i
i	NE	i	i	i	i	i	i	i	i
k	i	k	i	NE	i	i	NE	NE	NE
k	k	k	k	i	i	k	i	i	i
k	k	k	i	i	k	k	k	k	k
k	k	i	k	k	k	i	k	i	k
k	i	NE	i	k	k	i	i	i	i
i	NE	i	NE	i	k	i	NE	i	NE
i	NE	i	i	k	k	i	NE	i	NE
i	NE	i	k	k	i	NE	NE	NE	i

Tag 1 Tag 2 Tag3 Tag4 Tag 5-7

➔ Wenn die Personen sich bewegen, muss der Impfanteil höher als 50% sein

Verschiedene Erkrankungsszenarien mit unterschiedlichen Anteilen an geimpften Personen. Die Personen bewegen sich frei und haben jeden Tag Kontakt zu vier beliebigen Personen. Jedes Mal, wenn eine kranke Person auf eine ansteckungsfähige Person trifft, wird diese angesteckt. Zu Beginn gibt es immer zwei kranke Personen.

Wir treffen die Annahme, dass 8% der Personen immun sind auf Basis von Aufgabe 1, bei der 2/25 Personen immun gegen die Grippe sind.

½=50% sind geimpft, 8% sind immun, Infizierte sind nach 3 Tagen ansteckend

Tag	Kranke und solche die bereits ansteckend sind in %	Neu Infizierte	Gesunde, die noch erkranken können in %
1	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,42 = 3,36$	42
2	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,3864 = 3,09$	$42 - 3,36 = 38,64$
3	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,3555 = 2,844$	$38,64 - 3,09 = 35,55$
4	$2 + 3,36 = 5,36$	$5,36 \cdot 4 \cdot 0,3271 = 7,01$	$35,55 - 2,844 = 32,71$
5	$5,36 + 3,09 = 8,45$	$8,45 \cdot 4 \cdot 0,257 = 8,69$	$32,71 - 7,01 = 25,7$
6	$8,45 + 2,844 = 11,29$	$11,29 \cdot 4 \cdot 0,1701 = 7,68$	$25,7 - 8,69 = 17,01$
7	$11,29 + 7,01 = 18,3$	$18,3 \cdot 4 \cdot 0,0932 = 6,82$	$17,01 - 7,68 = 9,32$
8	$18,3 + 8,69 = 26,99$	$26,99 \cdot 4 \cdot 0,025 = 2,69$	$9,32 - 6,82 = 2,5$
9			$2,5 - 2,69 = -0,19$

Alle Ergebnisse sind auf zwei Dezimalstellen gerundet

Zwischen dem 8. und 9. Tag sind alle erkrankt.

60% sind geimpft, 8% sind immun, Infizierte sind nach 3 Tagen ansteckend

Tag	Kranke und solche die bereits ansteckend sind in %	Neu Infizierte	Gesunde, die noch erkranken können in %
1	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,32 = 2,56$	32
2	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,2944 = 2,36$	$32 - 2,56 = 29,44$
3	2	$2 \cdot 4 \cdot 0,2708 = 2,17$	$29,44 - 2,36 = 27,08$
4	$2 + 2,56 = 4,56$	4,54	24,91
5	6,29	5,13	20,37
6	8,46	5,16	15,24
7	13	5,24	10,08
8	18,31	3,54	4,84
9	23,47	1,22	1,3
10	28,71	0,92	0,08
11			-0,84

Zwischen dem 10. und 11. Tag sind alle erkrankt

80% sind geimpft, 8% sind immun, Infizierte sind nach drei Tagen ansteckend

Tag	Kranke und solche die bereits ansteckend sind in %	Neu Infizierte	Gesunde, die noch erkranken können in %
1	2	0,96	12
2	2	0,88	11,04
3	2	0,81	10,16
4	2,96	1,11	9,35
5	3,84	1,27	8,24
6	4,56	1,27	6,97
7	5,67	1,29	5,7
8	6,94	1,22	4,41

9	8,21		1,05		3,19	
10	9,5		0,81		2,14	
11	10,72		0,57		1,33	
12	11,77 9,77		0,36 0,3		0,76	
	Weiter wie oben	Nach Abzug der nicht mehr ansteckenden	Weiter wie oben	Nach Abzug der nicht mehr ansteckenden	Weiter wie oben	Nach Abzug der nicht mehr ansteckenden
13	12,58	9,7	0,2	0,18	0,4	0,46
14	13,15	9,46	0,11	0,11	0,2	0,28
15	13,51	8,83	0,05	0,06	0,09	0,17
	13,87	7,74	0,022	0,034	0,04	0,11

Es zeigt sich, dass wenn die Impfung den Zeitpunkt, an dem alle erkrankt sind über die 12 Tage der Ansteckungszeit hinausschiebt, anschließend die Personen, die noch erkranken können allein dadurch geschützt werden, dass die Anzahl der Kranken wieder abnimmt. Es muss also ein Prozentsatz geimpft werden, der diesen Fall ermöglicht. Da bei 60% Impfung schon 11 Tage vergehen, bis alle Krank sind, muss vermutlich nur ein etwas höherer Prozentsatz geimpft werden, damit die Bedingung erfüllt ist.

67% Impfung, 8% immun, Infizierte sind nach drei Tagen ansteckend

Tag	Kranke und solche die bereits ansteckend sind in %	Neu Infizierte	Gesunde, die noch erkranken können in %
1	2	2	25
2	2	1,84	23
3	2	1,69	21,26
4	4	3,12	19,47
5	5,84	3,82	16,35
6	7,53	3,77	12,53
7	10,65	3,73	8,76
8	14,47	2,91	5,03
9	18,24	1,55	2,12
10	21,97	0,5	0,57
11	24,88	0,069664	0,07
12	26,43	0,000355	0,000336
13			-0,000019

Bei 67% Impfungen wird ziemlich genau der Zeitpunkt erreicht, an dem die ersten Erkrankten nicht mehr ansteckend sind. Es ist also optimal 67% der Zielgruppe zu impfen, da nach dem 12 Tag der Schutz durch die Genesung der Kranken mehr Bedeutung gewinnt, als der Schutz durch Impfung.

Man trifft jeden Tag auf vier Personen. Am ersten Tag sind 2 Personen der Personen im 10x10 Feld krank. p ist der Anteil der Personen die immun sind. Jede Person trifft jeden Tag auf vier Personen. Die Wahrscheinlichkeit,

dass eine kranke Person 0 Nachbarn hat, die empfänglich sind beträgt : $P(X=0)=p^4$

dass eine kranke Person 1 Nachbarn hat, der empfänglich ist beträgt : $P(X=1)=4 p^3 \cdot$

Aufgabe 5:

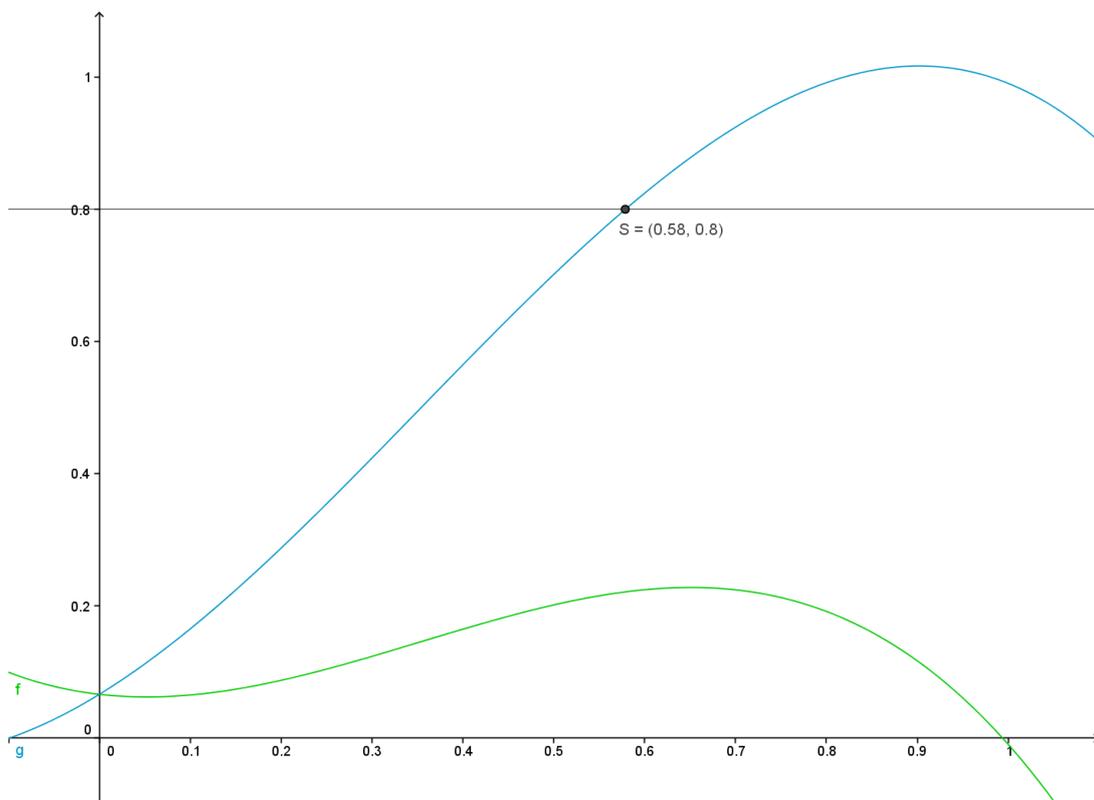
Mithilfe abgelesener Werte aus Abbildung zu Aufgabe 5 haben wir eine Funktion modelliert, die den indirekten Effekt in Abhängigkeit vom Impfanteil darstellt

$$f(x) = -0.02x^4 - 1.51x^3 + 1.62x^2 - 0.16x + 0.07 \text{ (Bestimmtheitsmaß } r^2=0.98)$$

Der Anteil der geschützten Personen in Verhältnis der gesamten Personen ergibt sich aus der Summe der Personen, die durch den indirekten Effekt geschützt werden und dem Impfanteil, also:

$$g(x) = f(x) + x$$

Der Anteil der geschützten Personen unterschreitet den Wert $g(x) = 0.8$ für $x < 0.58$ (siehe Abbildung)



Abschlussaufgabe

Die Schule mit 1000 Schülern nennen wir Schule1, die mit 2000 Schülern Schule2 und die mit 4000 Schülern Schule3.

Aus den vorherigen Aufgaben nehmen wir an, dass 8% der Schüler bereits die Grippe hatten und somit Immun sind. Wir reduzieren die Schüler die erkranken können also von 7000 auf 6440, da es 560 immune Schüler gibt. Man sollte nicht mehr als 82% der Schüler einer Schule impfen, da in diesem Fall bereits alle Schüler durch direkte und indirekte Effekte der Impfung geschützt sind.

Für das erste Szenario verteilen wir den Impfstoff in Abhängigkeit von der Anzahl der Schüler der Schulen die erkranken können, d.h.: die Schule mit 1000 Schülern erhält 429 Impfungen, die Schule mit 2000 Schülern erhält 857 Impfungen und die Schule mit den 3000 Schülern erhält 1714 Impfungen. Mithilfe der Funktion welche wir in Aufgabe 5 aufgestellt haben können wir herausfinden, dass bei einem Impfanteil von ca. 46,58% 66% der Schüler, also insgesamt 4250 der Schüler auch durch den indirekten Effekt von Impfungen geschützt sind. Es können also 2190 Schüler erkranken.

Für das zweite Szenario verteilen wir den Impfstoff sodass Schule1 und Schule2 Schulen komplett geschützt sind, indem 82% der nicht-immunen Schüler geimpft werden. Es besuchen insgesamt 3000 Schüler Schule1 und Schule2, davon sind 240 immun. Von den restlichen 2760 Schülern müssen also $2760 * 0.82 \approx 2263$ geimpft werden. 737 Impfungen bleiben übrig und können von Schule3 genutzt werden. 3680 Schüler der Schule3 sind nicht-immun der Anteil der geimpften Schüler der Schule3 beträgt damit 20%, somit sind 29% aller nicht immunen Schüler durch den direkten und indirekten Effekt der Impfungen geschützt. Es können also ca. 2613 Schüler erkranken.

	Schule 1	Schule 2	Schule 3	gesamt
nicht-immune Schüler	920	1840	3680	
immune Schüler	80	160	320	
Szenario 1				
Verteilung des Impfstoffes	0,14	0,29	0,57	
Gefährdete				2190
Szenario 2				
Verteilung des Impfstoffes	0,25	0,50	0,25	
Gefährdete				2613
Szenario 3				
Verteilung des Impfstoffes	0,13	0,27	0,6	
Gefährdete				2508
Szenario 4				
Verteilung des Impfstoffes	0,06	0,13	0,81	
Gefährdete	662	1288	404	2354

b) In der Schule kommt ein Schüler mit ca. 4 Schülern jeden Tag in Kontakt, sodass er sie anstecken kann, wobei diese Gruppen sich jeden Tag verändern können (Sitznachbarn, Freunde etc.). Dieser Anteil In Aufgabe 4 haben wir berechnet, dass für 67% Impfschutz, also 90 % gesamt Schutz , der Impfstoff optimal verwendet wird bei 100 Personen, die jeden Tag mit 4 Personen in Kontakt

kommen, wobei zu Beginn der Beobachtung 2 Personen krank sind . Von 33 Personen, die krank werden können, sind 2 Personen krank. Da mit 3000 Dosen lediglich 46% nichtimmune Personen in jeder Schule geimpft werden können und damit insgesamt in jeder Schule 65% nichtimmune Schüler geschützt sind , sind in Schule1 322 ($0,35 \cdot 0,92 \cdot 1000$) Schüler gefährdet, in Schule2 644, in Schule3 1288. Somit dürfen nicht mehr als $\frac{2}{33} \times 322 \approx 20$ Schüler krank sein in Schule1, in Schule2 nicht mehr als $\frac{2}{33} \times 644 \approx 40$ Schüler, in Schule3 nicht mehr als $\frac{2}{33} \times 1288 \approx 78$.

Aachen den 22.11.2018

An das Schulministerium:

Sehr geehrte Damen und Herren,

wir haben uns mit verschiedensten Szenarien für die Verteilungen des Impfstoffes auf die drei verschiedenen Schulen Amberhavns intensiv beschäftigt.

Wir sind dabei davon ausgegangen, dass 8% der Schüler immun gegen die Grippe sind. Diesen Wert haben wir anhand von einem Modellbeispiel berechnet. Es müssen also 6440 Schüler vor der Grippe geschützt werden.

Wenn man den Impfstoff fair auf die drei Schulen verteilt, d.h. im Verhältnis der Schüleranzahl der Schulen, erreicht man eine Anzahl von 2190 nicht geschützten Schülern. Die Schüler sind direkt und indirekt geschützt. Von indirekt geschützt spricht man, wenn eine Personengruppe die nicht geimpft ist nicht erkranken kann. Durch die gerechte Verteilung des Impfstoffes erreicht man einen ungefähren Schutz von 68,7% aller Schüler.

Um die Schüler jedoch noch besser vor der Grippe zu schützen sollten auch alle Lehrer geimpft werden. Diese haben Kontakt mit sehr vielen Personen die sich in der Schule bewegen .Werden sie nicht geimpft wird der Erreger viel leichter übertragen.

Damit die Schüler am besten geschützt werden schlagen wir ihnen vor, 429 Schüler der Schule mit 1000 Schülern, 857 Schüler der Schule mit 2000 Schülern und 1714 Schüler der Schule mit 4000 Schülern zu impfen.

Wir empfehlen Ihnen Schule 1 zu schließen sobald es mehr als 20 Grippefälle aufgetreten sind. Schule2 sollten sie schließen wenn mehr als 40 Grippefälle aufgetreten sind. Schule3 sollte geschlossen werden wenn mehr als 78 Schüler erkrankt sind .

Mit freundlichen Grüßen

Ihr Grippe-Expertenteam

Endaufgabe Teil 2

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	330	330	330	
geimpft	0,33	0,165	0,825	
Indirekt geschützt	0,466	0,242	0,146	Geschützte gesamt
Total geschützt	466	484	584	1534

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	140	290	570	
Geimpft	0,14	0,145	0,1425	
Indirekt geschützt	0,212	0,218	0,215	Gesamt geschützte
Total geschützt	212	436	860	1508

2000 Dosen:

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	660	660	660	
Geimpft	0,66	0,33	0,165	
Indirekt geschützt	0,888	0,466	0,242	Gesamt geschützte
Total geschützt	888	932	968	2788

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	280	580	1140	
Geimpft	0,28	0,29	0,285	
Indirekt geschützt	0,396	0,41	0,4	Gesamt geschützte
Total geschützt	396	820	1600	2816

4000 Dosen

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	1250	1250	1250	
Geimpft	1	0,625	0,3125	
Indirekt geschützt	1	0,852	0,441	Gesamt geschützte
Total geschützt	1000	1704	1764	4468

Gruppe	1000	2000	4000	
Impfdosen	560	1160	2280	

Geimpft	0,56	0,58	0,57	
Indirekt geschützt	0,78	0,80	0,79	Gesamt geschützte
Total geschützt	780	1600	3160	5540

Fazit: Wenn die Menge an Impfstoff gering ist, so muss an alle Gruppen gleich viel verteilen. Wenn die Menge an Impfstoff groß ist, bekommen alle proportional zur Gruppengröße den gleichen Anteil.