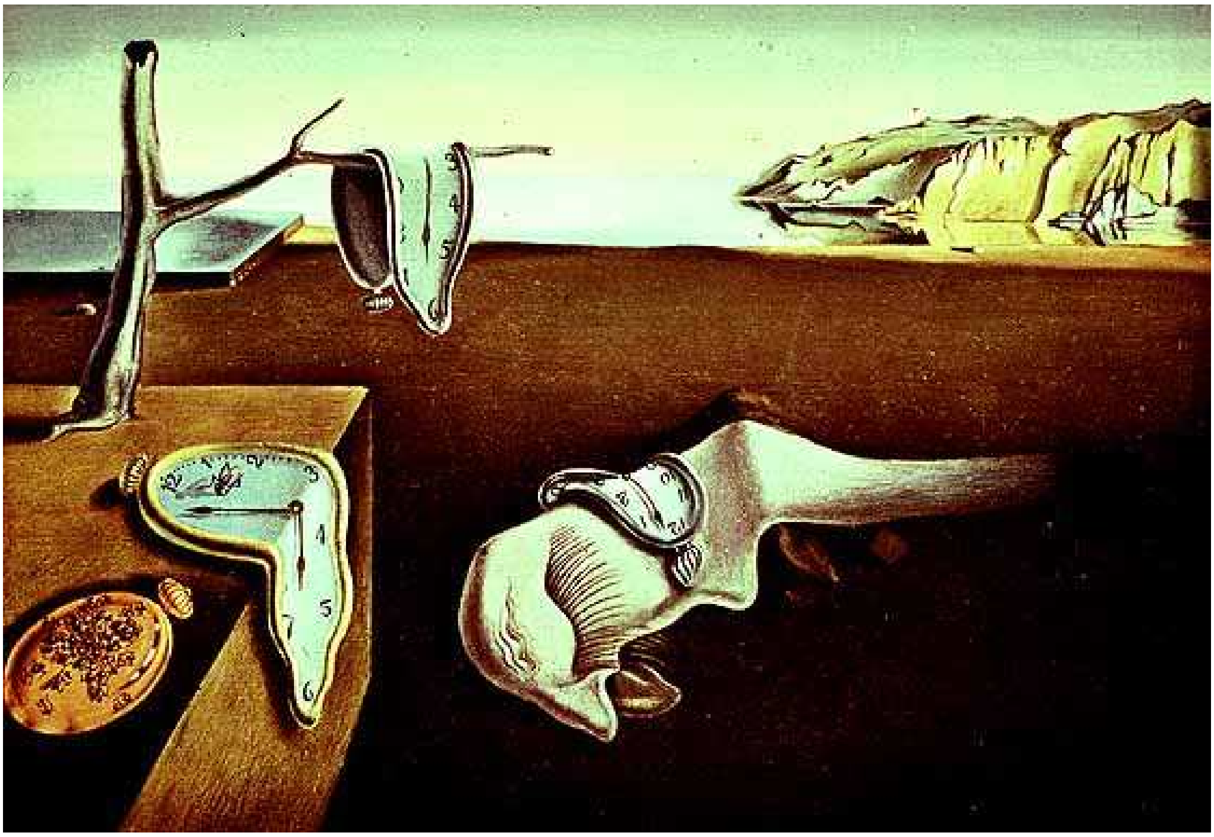
Wiskunde B-Dag 2006

24. November 2006



Zwischen den Uhrzeigern

Der Wiskunde B-Dag wird unterstützt durch

Texas Instruments und getal en ruimte

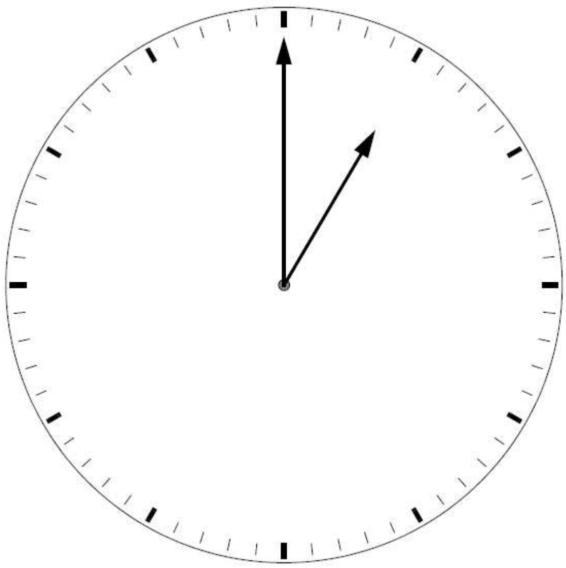
Wiskunde B-Dag 2006

Zwischen den Uhrzeigern

Einleitung

Der diesjährige Wiskunde B-Dag steht ganz im Zeichen der Zeit. Es geht um die Zeitanzeige einer Uhr mit kleinem Stundenzeiger, einem größerem Minutenzeiger und eventuell einem dritten, etwas hastig sich drehendem Sekundenzeiger. Unsere Uhr hat Zeiger, die sich völlig regelmäßig und perfekt fließend bewegen. Diese Zeigerbewegungen sind weit entfernt von denen einer Bahnhofsuhr. Dort holpert der Sekundenzeiger ruckartig seine Runden, wartet einen Moment oben, bis der Minutenzeiger seinen Schritt getan hat und ruckelt dann weiter.

Hier ist eine Uhr abgebildet, wie wir sie uns vorstellen, ungeachtet aller Verzierungen, die oft angebracht werden, um die Anziehungskraft auf eventuelle Käufer zu vergrößern.



Auf dieser Uhr ist es genau 1 Uhr. In Kürze wird der große Zeiger den kleinen Zeiger einholen. Das geschieht kurz nach 5 nach 1. Der Minutenzeiger beginnt zwar mit einem Rückstand, geht aber so viel schneller als der Stundenzeiger, dass er den Vorsprung des großen Zeigers schnell aufholt.

Als Aufwärmübung für eure heutige Denkleistung bearbeitet bitte die beiden folgenden Einstiegsfragen:

A. Wie viel Mal in 12 Stunden stehen der Minuten- und der Stundenzeiger genau aufeinander?

B. Wie spät genau holt auf der oben abgebildeten Uhr der Minutenzeiger den Stundenzeiger ein?

Wir formulieren ‚in 12 Stunden' und nicht ‚pro Tag', da der zweite Teil eines Tages von 24 Stunden eine exakte Wiederholung des ersten Teils ist. Wenn wir die oben schon beschriebene Uhr betrachten, legen wir als **Periode von 12 Stunden** diejenige Zeitspanne fest, die genau um 12 Uhr beginnt und exakt mit dem Zeitpunkt endet, an dem es zum ersten Mal wieder 12 Uhr ist.

Den Sekundenzeiger lassen wir vorläufig außer Acht. Erst im letzten Teil der Aufgabe taucht er auf.

Worum geht es am heutigen Wiskunde B-Dag?

Die Einstiegsaufgaben vermitteln bereits einen Eindruck, in welche Richtung die Aufgabe gehen wird: Über die Zeiger der Uhr und allerlei besondere Zeigerstände.

Wer interessiert sich für die Antworten solcher Fragen, wie sie in der Einleitung gestellt wurden? Zugreisende im allgemeinen nicht, auch Besitzer von aufgepeppten Designeruhren wie der hier abgebildeten sicher nicht.

Ihr und wir vom Wiskunde B-Dag allerdings sehr wohl: Denn in der Mathematik geht es um erstaunliche Fragen und möglichst noch erstaunlichere Antworten hierzu. Mehr noch als die Antworten mögen die Begründungen hierzu erstaunen. Eine Erläuterung wie „Dies sieht man, indem man es ausrechnet“ ist nicht besonders erhellend. Eine gute Erklärung ist wie das Entzünden einer Lampe in einer dunklen Schatzkammer. Zunächst blinzelt man mit den Augen, aber danach sagt man:„Ach, natürlich, so schön hängt alles miteinander zusammen. Cool!“

Die Einteilung der Aufgabe

Teil **A** führt die Einstiegsaufgabe **A** weiter. Es folgen noch einige Beispiele nutzloser Fragen mit möglichst schönen Antworten. Leitlinie: global betrachten und beweisen.

Teil **B** ist theoretischer ausgerichtet und stellt eine Fortführung der Einstiegsfrage **B** dar, wobei genau gerechnet und bewiesen werden muss. Der Gebrauch von Abbildungen und Algebra kann hilfreich sein. Leitlinie: Präzision.

Im Teil **C** werden die beiden Uhrzeiger miteinander vertauscht. Beurteilt selbst, inwieweit ihr die Ergebnisse aus den Teilen **A** und **B** in der geänderten Situation verwenden könnt bzw. sucht nach anderen, eigenen Ansätzen. Leitlinie: Wendet eure Ergebnisse aus den Teilen **A** und **B**auf eine neue Situation an oder seid pfiffig und findet eigene Strategien.

Teil **D** ist für die echten Zeitgeister. Sie erhalten hier Gelegenheit, sich zu beweisen! Seid nicht besorgt, wenn ihr damit nicht klarkommt. Es hat echten Tiefgang. Leitlinie von Teil **D**: Nehmt euch Zeit und lasst Raum für eigene Ideen und Herangehensweisen.

Das Endprodukt

Ihr habt Fragen, die sich bei der Betrachtung von Uhren stellen, auf unterschiedliche Arten und Weisen behandelt. Dabei seid ihr den vorgegebenen Fragestellungen gefolgt oder habt (pfiffig wie ihr seid) euren eigenen Wege gefunden. Daher sieht das Endprodukt folgendermaßen aus:

Eine Ausarbeitung, in der die Zeiger der Uhr euch vor Rätsel stellen, zu denen ihr die Lösungen liefert, wobei die Begründungen im Wettstreit um ihre Klarheit und Schönheit stehen.

Lasst euch nicht dazu verleiten, nur die einzelnen Fragen zu beantworten, sondern erstellt einen zusammenhängenden Bericht über eure Erfahrungen dieses Tages, der auch für diejenigen gut lesbar ist, die nicht die genaue Fragestellung vorliegen haben.

weitere Tipps

- Achtet darauf, dass die Arbeit gut kopierbar ist, verwendet also schwarze Schreib- und Zeichenmaterialien.
- Teilt euch die Zeit gut ein! Das Erstellen des Berichts kostet viel Zeit. Beginnt rechtzeitig damit!
- Teilt die Arbeit auf, sobald ihr euch über euer Vorgehen einig seid.

Zum Schluss: Viel Erfolg und viel Spaß mit dieser Aufgabe

Teil A: Gedanken über Zeigerstellungen

Die Eingangsfrage **A** kann durch Fragen über spezielle Stellungen der Zeiger weitergeführt werden.

A1 Wenn die beiden Zeiger auf einer geraden Linie liegen, wie genau um 6 Uhr, dann bilden die beiden Zeiger einen Winkel von 180°.
Wie oft stehen die beiden Zeiger innerhalb einer Periode von 12 Stunden im Winkel von 180° zueinander?

Für die Werte von 0° und 180° ist eindeutig, was damit gemeint ist, dass die Zeiger in diesem Winkel zueinander stehen. Fragt man aber, wie oft die beiden Zeiger einen Winkel von 90° bilden, kommt doch die Gegenfrage:„Was meinst du mit einem Winkel von 90° ? Es gibt nämlich im allgemeinen immer zwei Winkel zwischen den beiden Zeigern. Beträgt der eine 90^{circ} so beträgt der andere 270°. In dieser Aufgabe legen wir fest:

Der Winkel zwischen zwei Zeigern ist immer der <u>kleinere</u> von zwei möglichen Winkeln.

Demnach bilden die beiden Zeiger exakt um 3 Uhr und exakt um 9 Uhr einen Winkel von 90°, aber man kann noch viel mehr Zeigerstellungen mit einem Winkel von 90° finden.

A2 Wie oft bilden die beiden Zeiger in einer Periode von 12 Stunden einen Winkel von 90°, von 120°, von 30°?

Wenn ihr eure Antworten auf die vorangegangenen Fragen für Personen, die den genauen Aufgabentext nicht kennen, klar darstellen möchtet, dann müsst ihr euch vorher gut überlegen, wie ihr das anstellen wollt. Hierzu könnt ihr grafische Veranschaulichungen in Erwägung ziehen oder eine Notation, die rechnerische Überlegungen deutlich macht, oder ... sucht euch eine gute Möglichkeit aus!

Einige Zeigerstellungen sind offensichtlich möglich, andere sind (beinahe) offensichtlich unmöglich. Um diese (Un)möglichkeiten geht es in der folgenden Frage.

A3 Vier Mal die Frage „Wie spät ist es?“
Zwei Mal kann ein Zeitpunkt angegeben werden und zwei Mal ist dies unmöglich. Findet es selbst heraus ... Die Zeitpunkte selbst müsst ihr nicht berechnen. Es geht darum, zu zeigen, warum eine bestimmte Zeigerstellung unmöglich ist.

- **a.** Die Zeiger bilden einen Winkel von 180° und der Minutenzeiger steht recht nahe bei der 11. Wie spät ist es?
- **b.** Die Zeiger bilden einen Winkel von 90° und der Minutenzeiger steht genau horizontal. Wie spät ist es?
- **c.** Die Zeiger stehen symmetrisch zur horizontalen Linie durch den Drehpunkt der beiden Zeiger und der Stundenzeiger steht benachbart zur 8. Wie spät ist es?
- **d.** Die Zeiger stehen beide genau horizontal. Wie spät ist es?

Die Friseursuhr

Beim Friseur schaut ihr in den Spiegel. Wenn hinter euch eine gewöhnliche Uhr hängt, seht ihr deren Spiegelbild. Stellt euch eine Uhr ohne Ziffern vor. Schaltet nun vorübergehend euer Gehirn aus: Ihr schaut in den Spiegel und ihr seht, was ihr seht, ohne dass euer Gehirn interpretiert, wie es in Wirklichkeit aussieht.

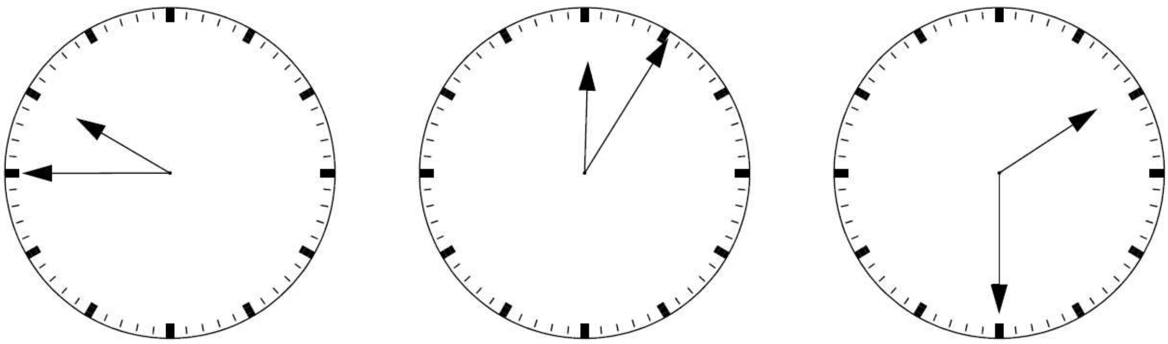
A4 **a.** Ihr seht im Spiegel, dass es ungefähr 5 nach 2 ist. Wie spät ist es tatsächlich?

b. Gibt es an einem Tag Uhrzeiten, zu denen es keinen Unterschied macht, ob ihr auf die echte oder die gespiegelte Uhr schaut?

c. Wenn ihr die Uhr im Spiegel eine Zeit lang betrachtet, seht ihr, wie sie sich rückwärts dreht. Merkwürdig. Werft ihr aber nur einen kurzen Blick auf die Uhr im Spiegel, so seht ihr immer einen Zeigerstand, der auch auf der nicht gespiegelten Uhr möglich ist. Erklärt diese Beobachtung.

Teil B: Rechnungen zu Zeigerstellungen

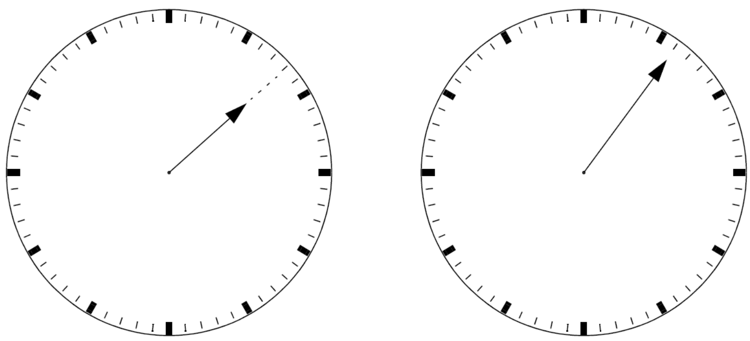
Im Teil **A** ist euch das schon einmal begegnet: Nicht alle Stellungen von zwei Zeigern kommen bei der Zeitanzeige der Uhr vor. Auf den drei folgenden Abbildungen ist das zu erkennen.



Wenn der Minutenzeiger auf die 9 zeigt, kynn der Stundenzeiger nicht exakt auf die 10 zeigen. Wir arbeiten heute mit sehr guten Uhren. An diesen Beispielen ist die Argumentation einfach: Der Stundenzeiger zeigt genau eine volle Stunde an. Dann muss der Minutenzeiger genau auf die Zwölf zeigen.

Was ist denn eigentlich alles möglich?

B1 Hier sind zwei verschiedene Uhren abgebildet.



a. Auf der linken Uhr ist nur der Stundenzeiger zu sehen. Dieser zeigt genau auf das achte Strichlein auf dem Ziffernblatt. Gebt die möglichen Zeigerstellungen des Minutenzeigers an

b. Auf der rechten Uhr seht ihr nur den Minutenzeiger. Der zeigt genau auf das sechste Strichlein des Ziffernblattes. Gebt die möglichen Zeigerstellungen des Stundenzeigers an.

„Der große Zeiger zeigt auf das sechste Strichlein“ bedeutet, dass es 6 Minuten nach einer vollen Stunde ist. Wenn der kleine Zeiger auf das achte Strichlein zeigt, hat das aber mit 8 Uhr nichts zu tun. Hier sollte also etwas mehr Klarheit erreicht werden. Die Unterteilung durch 60 Striche hat mit der Minutenanzeige zu tun. Die zwölf dickeren dieser 60 Markierungen deuten die Stunden (von 1 bis 12) an. Die Zeigerstände des Minuten- und des Stundenzeigers zusammen geben einen Zeitpunkt an. Wir betrachten im folgenden mögliche Zeigerstände des Stunden- und des Minutenzeigers und die zugehörigen Zeitpunkte.

Um aus der einen Angabe von Zeigerstand und Zeitpunkt jeweils die andere Angabe berechnen zu können, legen wir folgende Schreibweise fest:

Ein Zeigerstand wird durch den Winkel zwischen dem senkrechten Stand des Zeigers, wenn er nach oben zeigt, und dem aktuellen Stand angegeben.

Um genau 10 nach 3 ist also der Stand des großen Zeigers 60° und der Stand des kleinen Zeigers 90°.

B2 **a.** Der Winkel zwischen den beiden Zeigern ändert sich fortwährend. Welche Winkel kommen zwischen den Zeitpunkten zehn nach drei (3:10 Uhr) und zwanzig vor vier (3:40 Uhr) vor?

b. Wie groß ist der Winkel zwischen den beiden Zeigern um acht vor halb fünf (4:22 Uhr)?

Der große Zeiger durchläuft eine Umdrehung von 360° in einer Stunde und beginnt dann wieder von neuem. Der kleine Zeiger braucht für eine Umdrehung genau zwölf Stunden, bevor er wieder von neuem beginnt.

Es gibt daher noch eine Unterscheidung, die wichtig genug ist, um sie genauer zu erklären: Wenn wir nur den Stand des großen Zeigers betrachten (durch den Winkel zum senkrechten Stand angegeben), dann berücksichtigen wir dabei bislang nicht, wie viele volle Umdrehungen der Zeiger seit 12 Uhr bereits zurückgelegt hat. Man muss daher zwischen dem **Winkel des Zeigers zum senkrechten Stand** und dem **Winkel, der seit dem Beginn um 12:00 Uhr (oder besser: um 0:00 Uhr) zurückgelegt wurde** unterscheiden. Im Beispiel „10 nach 3“ hat der große Zeiger bereits mehr als drei volle Umdrehungen zurückgelegt.

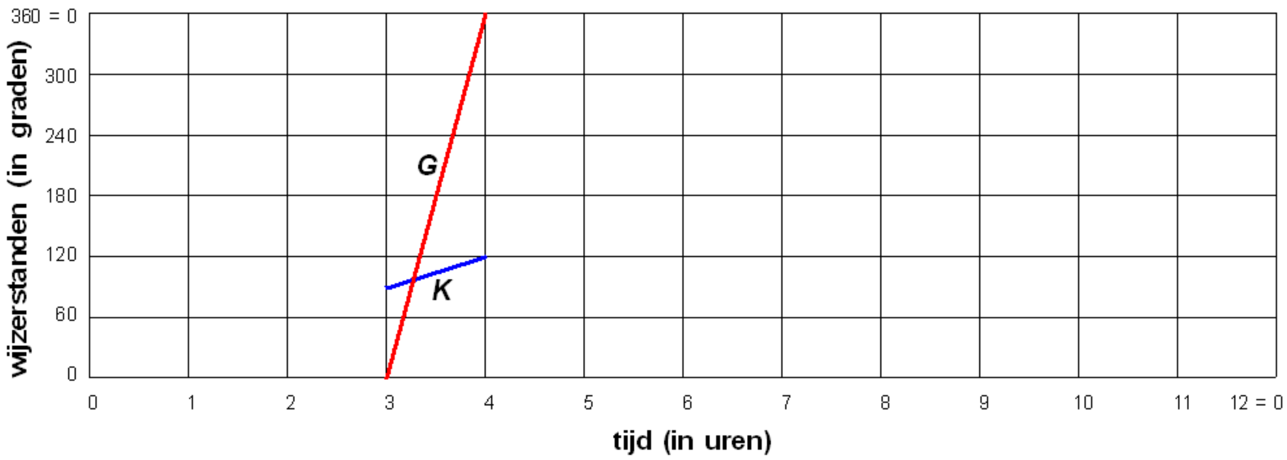
Für den großen Zeiger (den Minutenzeiger) verwenden wir den Buchstaben ‚g‘ in folgender Weise:

g ist der vom großen Zeiger seit dem Start um 0:00 Uhr zurückgelegte Winkel.
G ist der Winkel zwischen dem Stand des großen Zeigers und dem senkrechten Stand.

Im Beispiel „10 nach 3“ gilt also: **g** = 1140° und **G** = 60°.

In einem Zeigerstanddiagramm kann der Zeigerstand (in Grad) gegen die Zeit (in Stunden) aufgetragen werden. Im folgenden Diagramm sind die Zeigerstände des großen Zeigers **G** und des kleinen Zeiger **K** für alle Zeitpunkte zwischen 3:00 Uhr und 4:00 Uhr wiedergegeben.

Zeigerstanddiagramm



Beachtet, dass die 12 Uhr der horizontalen Achse und die 360° auf der vertikalen Achse beide durch die Zahl 0 ersetzt werden. Hier zeigt sich deutlich, dass die Zeitangabe und die Zeigerstände dann eine neue Runde beginnen.

Zu den beiden eingezeichneten Abschnitten gehören folgende algebraische Beschreibungen:

$$\left.\begin{array}{rcl} G &=& 360t - 1080 \\ K &=& 30t \end{array}\right\} \quad \text{für} \quad 3 < t < 4$$

Die vollständigen Graphen von G und K sowie die zugehörigen algebraischen Beschreibungen (für alle Werte t von $t = 0$ bis $t = 12$) lassen sich für elegante Beweisführungen zu Aussagen über Zeigerstände verwenden.

Aber natürlich dürft ihr auch eure eigenen Wege suchen. Hierzu gilt dann natürliche die Voraussetzung, dass ihr eure Entscheidungen und euer Vorgehen in klarer Weise erläutert.

Im Teil **A** wird gefragt, wie oft bestimmte Zeigerstände innerhalb einer Periode von 12 Stunden vorkommen.

Eine naheliegende weiterführende Frage ist nun:

B3 Zu welchen exakten Zeitpunkten

- stehen die beiden Zeiger genau aufeinander?
- zeigen die beiden Zeiger genau in entgegengesetzte Richtungen?
- bilden die beiden Zeiger einen Winkel von 90°, von 120°, von 30°?

Achtung: Mit „exakt“ meinen wir nicht „auf Minuten oder auf Sekunden oder auf Zehntel Sekunden genau“. Ein exakter Zeitpunkt kann auch durch eine Bruchzahl dargestellt werden, wie z. B. 2 Uhr oder $23\frac{3}{7}$ *Minuten.*

Auch bei anderen Fragestellungen kann kann die graphische oder die algebraische Darstellung hilfreich sein. Aber es gilt nun wieder: Wenn ihr einen eigenen Weg gefunden habt, um diese Fragen zu beantworten, so wählt diesen Weg und erläutert in aller Klarheit eure Entscheidungen und Vorgehensweisen.

B4 So, wie hier abgebildet, werden Uhren gerne in Anzeigen aufgemacht. Die Zeiger exakt im gleichen Winkel zur vertikalen Achse durch den Drehpunkt der Zeiger, als einladende Arme ein wenig nach oben dem Käufer entgegen gestreckt. Stillstand!

a. Welche Uhrzeit zeigt die Uhr dann genau?

b. Es gibt weitere zur vertikalen Achse symmetrische Zeigerstände (obgleich sie in der Werbung selten verwendet werden). Welche Zeigerstände erfüllen diese Symmetrie?

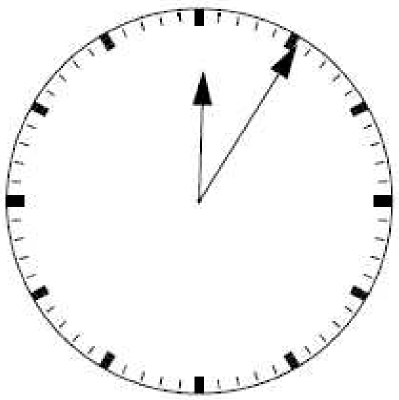
c. Die beiden Zeiger sollen nun symmetrisch zur horizontalen Achse durch den Drehpunkt stehen. Der kleine Zeiger zeigt in die Nähe der 8. Wie spät ist es genau?

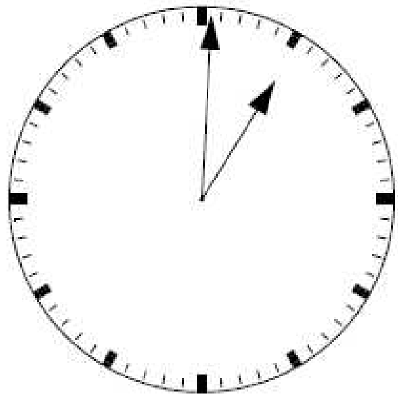
B4 Durch einen Defekt ist mitten in der Nacht von 0:00 Uhr an der kleine Zeiger in die falsche Richtung gelaufen. Der große Zeiger läuft weiterhin in die richtige Richtung.
Berechne auch für diese Situation, zu welchen Zeitpunkten die Zeiger genau aufeinander stehen

B4 Formuliert selbst mindestens zwei Probleme, die ihr mit Hilfe der graphischen oder der algebraischen Beschreibung lösen könnt. Natürlich ist es besonders schön, wenn ihr die Lösungen auch in Worte fassen könnt.

Teil C: Alpträume?

Kurz nach Mitternacht wacht ihr auf und erkennt auf eurem Wecker, dass es gerade zwölf Uhr gewesen ist. Ihr schlaft wieder ein, aber nach ungefähr einer Stunde wacht ihr wieder auf. Ihr bekommt einen Schrecken! Die Zeit scheint stillzustehen. Zum Glück wird euch schnell bewusst, dass ihr nur den kleinen und den großen Zeiger verwechselt habt.

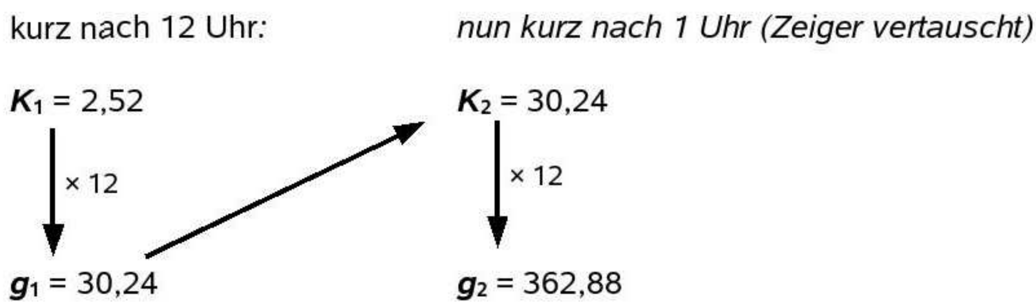




Dass ihr bei dieser Verwechselung ungefähr passende Zeigerstände gesehen habt, ist deutlich zu erkennen, wenn ihr die beiden oben eingezeichneten Zeigerstände betrachtet. Es stellt sich nun die Frage, ob sich bei der Verwechselung der Zeiger bei einem bestimmten Zeigerstand exakt ein neuer möglicher Zeigerstand ergibt, und wenn ja, wie dieser dann präzise berechnet werden kann.

Der nun folgende Gedankengang bringt euch in dieser Frage hoffentlich auf eine gute Spur. Betrachtet die Zeigerstände des großen und des kleinen Zeigers der linken von den beiden oben abgebildeten Uhren (wir bezeichnen die Zeigerstände mit $\mathbf{G_1}$ und $\mathbf{K_1}$). Da der große Zeiger zwölfmal so schnell seine Umdrehungen zurücklegt, wie der kleine Zeiger, gilt für den zurückgelegten Winkel der Zeiger in Grad: $\mathbf{g} = 12\mathbf{K}$. Da $\mathbf{g_1}$ etwas größer als $30°$ ist, muss $\mathbf{K_1}$ demnach etwas größer als $2,5°$ sein. Bei der rechten Uhr muss es genau ander herum sein: $\mathbf{G_2}$ ist etwas größer als $2,5°$ und $\mathbf{K_2}$ muss etwas größer als $30°$ sein. Der Minutenzeiger hat allerdings bereits mehr als eine vollständige Umrundung von $360°$ zurückgelegt! Daher muss $\mathbf{g_2}$ dann etwas größer als $362,5°$ sein.

Ein erster Versuch, mit Hilfe einer Schätzung den genauen Zeitpunkt zu finden, kann schematisch wie folgt dargestellt werden. Mit einem geschätzten Startwert von $\mathbf{K_1} = 2,52$ für die linke Uhr können weitere Werte berechnet werden:



Für den Stand des großen Zeigers um kurz nach 1 Uhr gilt daher $\mathbf{G_2} = 2,88°$. Nicht wirklich schlecht, aber das sollte verbessert werden! Die Lücke zwischen $\mathbf{K_1}$ und $\mathbf{G_2}$ kann verkleinert werden.

Untersuche genau, wie in diesem Schema gerechnet wird und versuche, mit einem anderen Startwert für $\mathbf{K_1}$ auf der linken Uhr einen Wert für $\mathbf{G_2}$ auf der rechten Uhr zu erhalten, der gleich $\mathbf{K_1}$ ist. Betrachte nun dein Vorgehen bei dieser Berechnung. Versuche, das Rechenschema auf einem allgemeineren Niveau zu beschreiben und verwende deine Überlegungen, um zwei Kernfragen zu beantworten:

C1 Wie viele exakte Zeigerstände treten in einer Periode von 12 Stunden auf, für die die Vertauschung der Zeiger ebenfalls zu einem exakten Zeigerstand führt?

C2 Berechne einige dieser exakten Zeigerstände.

Teil D: Stunden, Minuten und Sekunden: eine Herausforderung für die echten Zeitgeister

Der Sekundenzeiger spielte bis hierher keine Rolle. In diesem Teil beziehen wir ihn mit ein! In jeder Minute durchläuft der Sekundenzeiger eine volle Umdrehung. In einer Periode von 12 Stunden durchläuft er demnach 720 Runden.

Für den Sekundenzeiger ist deshalb, wie für den Minutenzeiger, eine Unterscheidung zwischen dem *Winkel zwischen aktuellem Zeigestand und senkrechtem Zeigerstand um 0:00 Uhr* und dem *Winkel, der seit 0:00 Uhr zurückgelegt wurde.*

Vereinbarung:

s	ist der vom Sekundenzeiger seit dem Start um 0:00 Uhr zurückgelegte Winkel.
S	ist der Winkel zwischen dem Stand des Sekundenzeigers und dem senkrechten Stand.

Zum Zeitpunkt $\mathbf{t} = 0$ Uhr (=12 Uhr) stehen die drei Zeiger genau bereinander.

D1 Untersuche, ob es noch weitere Zeitpunkte gibt, zu denen die drei Zeiger genau übereinander stehen. Ihr dürft hierbei natürlich eure Ergebnisse aus dem Teil **B** nutzen.

Eine spannende Frage ist:

D2 Gibt es Zeitpunkte, zu denen der Stunden-, der Minuten- und der Sekundenzeiger untereinander jeweils im 120°-Winkel zueinander stehen?

Andere Zeiteinteilung – neue Möglichkeiten?

Bislang haben wir ausschließlich mit der gewöhnlichen Zeiteinteilung gearbeitet:

- In einer ganzen Umdrehung des Stundenzeigers durchläuft der Minutenzeiger 12 volle Runden.
- In einer ganzen Umdrehung des Minutenzeigers durchläuft der Sekundenzeiger 60 volle Runden.

Diese Zeiteinteilung bezeichnen wir ab jetzt als (12,60)-Einteilung. Vielleicht seid ihr etwas enttäuscht über die herausgefundenen Antworten zu **D1** und **D2** in dieser Zeiteinteilung. Schöne Konstellationen der drei Zeiger treten dabei selten auf. Vieleicht liefert eine andere Zeiteinteilung eine Lösung zu diesem Problem!

Wir definieren die $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$**-Einteilung** der Zeit wie folgt:

- In einer Umdrehung des Stundenzeigers durchläuft der Minutenzeiger p volle Runden.
- In einer Umdrehung des Minutenzeigers durchläuft der Sekundenzeiger q volle Runden.

Demnach sieht die (10,10)-Einteilung wie folgt aus:

- In einer Umdrehung des Stundenzeigers durchläuft der Minutenzeiger 10 volle Runden.
- In einer Umdrehung des Minutenzeigers durchläuft der Sekundenzeiger 10 volle Runden.

Die abschließende Frage an diesem Wiskunde B-Dag lautet

D3 Für welche (p, q)-Einteilungen der Zeit sind Zeitpunkte möglich, zu denen die drei Zeiger untereinander in Winkeln von $120°$ zueinander stehen?