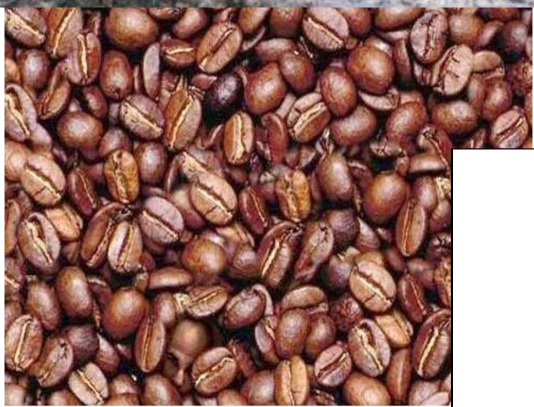
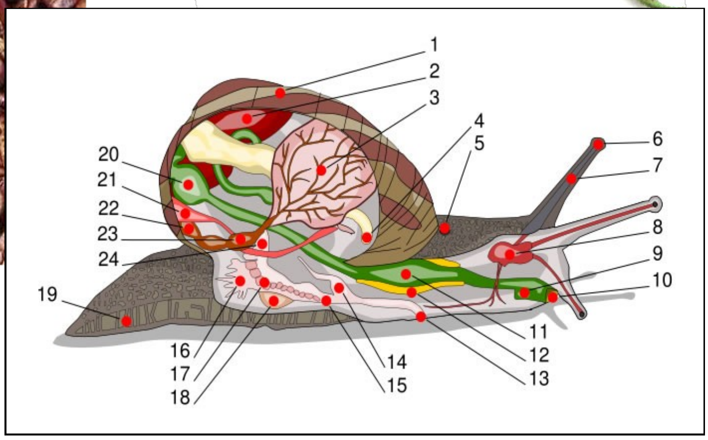
WISKUNDE B-DAG 2008

Freitag, 21. November







Die Schnecken- und Bohnenvermutung

Der Wiskunde B-Dag wird gesponsert durch

Texas Instruments

getal en ruimte

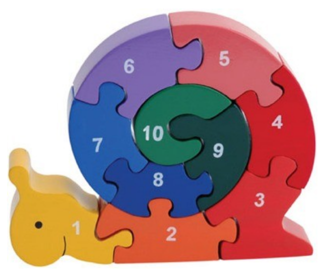
Vorab
Diese Wiskunde B-dag Aufgabe besteht aus zwei Teilen. Im ersten Teil untersuchst du die Bewegung einer besonderen Art Schnecken: Schnecken, die aus würfelförmigen Klötzen besteht. Der zweite Teil ist inspiriert von einem afrikanischem Spiel, das meistens mit Muscheln gespielt wird und unter vielen Namen bekannt ist: Kalaha, Oware, Wari oder Awélé. Da wir doch etwas von der Tradition abweichen, sprechen wir in dieser Aufgabe von Bohnen.
Du kannst zum Experimentieren benutzen, was du willst: Münzen, Erbsen, Flaschendeckel. Bei der Schnecke kannst du auch von den würfelförmigen Klötzen abweichen, wichtig ist nur, dass man sie stapeln kann. Rechteckige Klötze und Dame-Spielsteine sind dafür sehr geeignet.
In der ganzen Aufgabe geht es darum, wie sich die Schnecke und die Verteilung der Bohnen entwickeln. Du formulierst im Anschluss an deine Untersuchungen Vermutungen und beweist sie eventuell. Daher der Titel.

Tageseinteilung
Verwende den Morgen für den ersten Teil und den Mittag für den zweiten Teil. Damit ist eine grobe Empfehlung gegeben. Du kannst deine Zeit auch flexibler einteilen.
Der Schneckenteil besteht aus einer Menge Aufgaben, die du wahrscheinlich nicht alle schaffst. Das ist nicht schlimm: es geht um das, was du selbst herausgefunden hast und darum, wie du es dokumentierst.
Die Erkenntnisse und Ideen, die du im ersten Teil gefunden hast, benötigst du für den zweiten Teil über die Bohnen. Aber in diesem zweiten Teil wirst du viel mehr deinen eigenen Weg suchen müssen.

Endprodukt
Dein abschließender Bericht muss für jemanden, der noch nicht weiß worum es in der Aufgabe geht, gut lesbar sein. Das bedeutet, dass du deutlich beschreiben musst worum es geht und was du untersucht hast.
Es ist möglich, dass du durch Probieren und Argumentieren allerlei Dinge entdeckst, von denen du selber überzeugt bist, für die du aber noch keine schlüssige Argumentation (Beweis) gefunden hast. Solche Thesen kannst du auch gerne in deinen Bericht mit aufnehmen.
Es ist schön, wenn du auch eine Argumentation hast, die deiner Vermutung eine sichere Grundlage gibt. Es ist natürlich weniger schön, wenn du eine These angibst, die bereits durch ein simples Beispiel widerlegt werden kann. Darum prüfe deine Thesen gründlich!
An einzelnen Stellen steht eine Argumentationsaufgabe. Da das Argumentieren auf diesem Wiskunde B-Dag wichtig ist, musst du auf jeden Fall die Ergebnisse dieser Aufgaben in deinen Bericht aufnehmen.

Experimentieren in Excel
Das Experimentieren mit den Schnecken und Bohnen dieser Aufgabe lässt sich sehr gut am Computer durchführen. Dafür sind zwei Excel-Dateien verfügbar, für jeden Teil dieser Aufgabe eine. Im Text wird angegeben, wann du so eine Datei benutzen kannst.

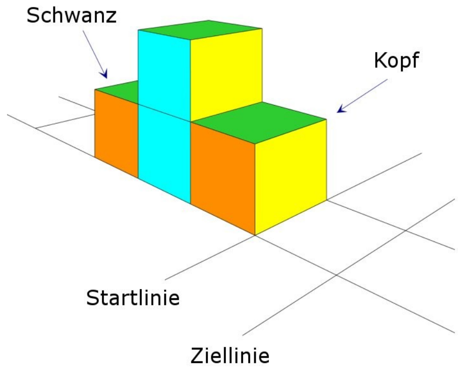
Viel Erfolg!

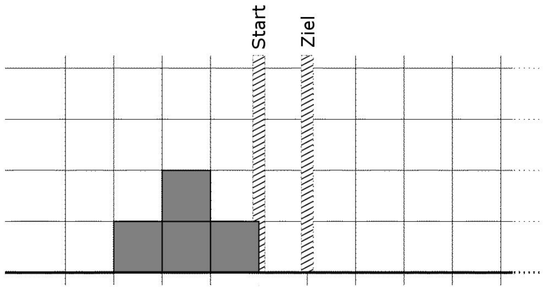


Teil 1: Schnecken

1A: Erkundung von Bewegung und Form

Du wirst mit diesen Reihen arbeiten, die durch Klotzstapel geformt sind, so wie diese Reihe:





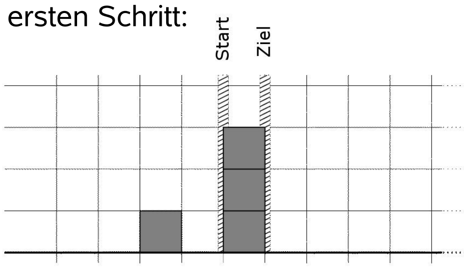
Seitenansicht Schnecke Rasterpapier

Solch eine Reihe von Klötzen nennen wir eine *Schnecke*. Die gezeichnete Schnecke besteht aus 1+2+1 = 4 Klötzen. Den ganz rechten Stapel nennen wir den *Kopf* der Schnecke, den ganz linken, den Schwanz. In der Fläche sind auch eine Start- und Ziellinie gezeichnet. Die Schnecke bewegt sich nämlich. Zu Beginn steht die Schnecke mit dem Kopf an der Startlinie. Die Bewegung der Schnecke verläuft Schritt für Schritt.
Ein *Schritt* wird auf die folgende Weise gesetzt:

> *Von jedem Stapel wird ein Klotz weggenommen. Diese Klötze bilden einen neuen Stapel, der direkt vor den Kopf gesetzt wird.*

Die ursprünglichen Stapel werden dadurch niedriger und es kommt ein Stapel hervor mit einer Höhe gleich der Anzahl der ursprünglichen Stapel. Der neue Kopf ist ein Reihe weiter gekommen. Die Schnecke ist also in Bewegung!

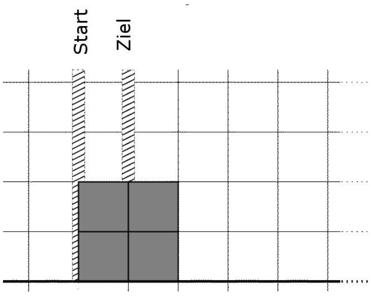
In dem Beispiel sieht man den ersten Schritt:



Schritt 1

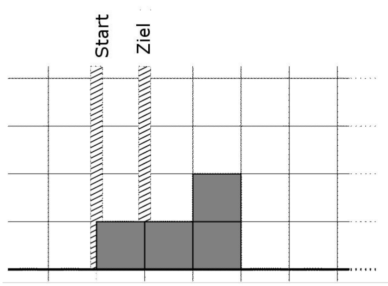
Nun gibt es ein Loch in der Schnecke - das kann bei diesen Klotzschnecken nun mal passieren. Du kannst sogar mit einer Schnecke mit Löchern beginnen.

Die Schnecke geht in gleicher Weise Schritt für Schritt weiter: von jedem Stapel einen Klotz wegnehmen und direkt rechts der Schnecke damit einen neuen Kopf bilden.



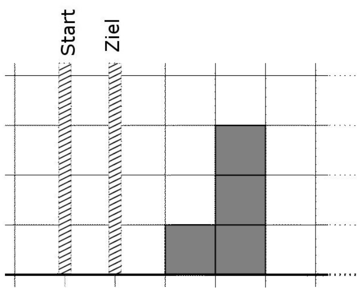
Schritt 2

⇒



Schritt 3

⇒



Schritt 4

Nach dem letzten gezeichneten Schritt ist die gesamte Schnecke über die Ziellinie. Diese Schnecke braucht also vier Schritte, um die Ziellinie zu überschreiten.

Probiere die Fortbewegung mit einigen selbst ausgedachten Schnecken aus. Du kannst Klötze dafür nutzen, aber mit Dame-Spielsteinen geht es auch sehr gut. Das Rasterpapier (oder ein Damespielbrett) ist für die Arbeit praktisch, vor allem für Schnecken, die Löcher haben. Probiere es auch mal mit einer liegenden Schnecke (alle Klötze hintereinander mit einer Höhe von 1) und einer stehenden Schnecke (alle Klötze auf einem Stapel) vor der Startlinie.
Wie bewegen sich die Tiere? Wenn eine Schnecke liegend oder stehend am Start anfängt, kommt sie dann unterwegs auch wieder in eine liegende oder stehende Form?

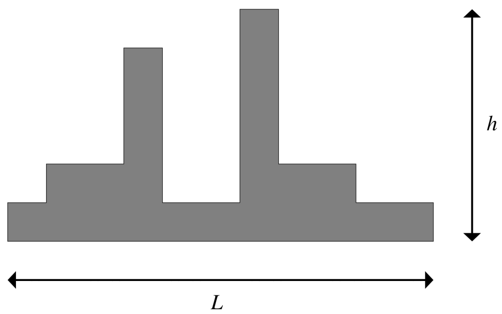
Untersuchung 1.
Es sind noch andere Schnecken als in dem Beispiel mit vier Klötzen möglich.
Betrachte zunächst die möglichen Vier-Klotz-Schnecken.
Start und Ziel bleiben wie oben.

- **a** Kannst du eine Schnecke angeben, die in drei Schritten die Ziellinie erreicht?
- **b** Ist es möglich eine noch schnellere Vier-Klotz-Schnecke zu anzugeben?
- **c** Kannst du eine Schnecke angeben, die fünf Schritte braucht?
- **d** Geht es noch langsamer?

Untersuchung 2.
Betrachte nun Schnecken, die aus fünf Klötzen bestehen.
Welche Anfangsform hat die Schnecke, die am schnellsten über die Ziellinie gelangt?

Eine Schnecke muss natürlich nicht nur aus vier oder fünf Klötzen bestehen. Die Gesamtanzahl der Klötze einer Schnecke geben wir mit dem Buchstaben M an.
Die Fälle M = 4 und M = 5 sind hier oben schon erörtert worden.

Betrachte nun eine Schnecke in ihrer Ausgangsform, bestehend aus M Klötzen, ohne Löcher. Hier ist ein Beispiel solch einer Schnecke mit der Länge L (Anzahl Stapel) und der Höhe h (die Anzahl der Klötze des höchsten Stapels):



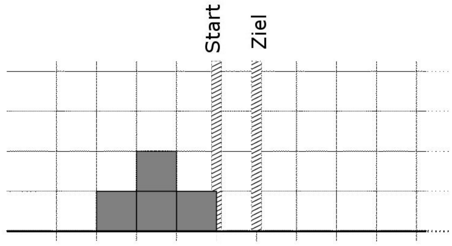
Wenn die Höhe einer Schnecke 5 beträgt, kannst du genau angeben wie viele Schritte nötig sind, um über die *Startlinie* zu kommen. Das ist nicht so schwer...
Es ist etwas komplizierter, wenn man feststellen möchte, wann die Schnecke ganz über die *Ziellinie* ist.

Untersuchung 3.
Die Ziellinie liegt noch immer ein Kästchen von der Startlinie entfernt und die Anfangsform der Schnecke hat keine Löcher.

- **a** In wie vielen Schritten ist eine Schnecke mit der Länge L und der Höhe h über die Ziellinie?
- **b** Denk dir eine Anfangsform einer Schnecke aus für M = 56 , die am schnellsten die Ziellinie passieren wird.
  Mache das auch für M = 64.
- **c** Kannst du für ein beliebiges M etwas über die Anfangsform der schnellsten Schnecke sagen?

Das Experimentieren mit Schnecken dauert sehr lange, wenn du jede Form, die sie unterwegs annimmt, von neuem zeichnest. Darum führen wir hier eine neue Form des

Aufzeichnens ein:
eine Reihe von Zahlen, wobei jede Zahl die Höhe eines Stapels wiedergibt.
Die Bewegung der Schnecke aus dem Beispiel mit dem wir angefangen haben:



Wird dann bezeichnet als

Beginn	1 2 1
Schritt 1	0 1 0 3
Schritt 2	0 0 0 2 2
Schritt 3	0 0 0 1 1 2
Schritt 4	0 0 0 0 0 1 3

Einer Schnecke kannst du eine unregelmäßige Anfangsform geben, so wie 9 0 0 0 8 1 1, oder eine sehr regelmäßige Form, so wie 5 4 3 2 1.
Wenn sie einmal in Bewegung ist, wird die Anzahl der Formen, die eine Schnecke annehmen kann, beschränkt.
Die zwei Formen, die hier oben beschrieben sind, können nicht während der Fortbewegung vorkommen. Warum nicht?

Manchmal kann es nützlich sein während der Bewegung zurück zu schauen zu der Form, die die Schnecke davor gehabt haben muss.

Untersuchung 4.

- **a** Denke eine Schnecke aus, die nach einem Schritt diese Form hat: 4 4 4 4 4
  Gibt es mehrere Möglichkeiten?
- **b** Denke eine Schnecke aus, die nach einem Schritt die Form 4 4 4 4 4 4 hat, oder erkläre warum dies nicht möglich ist!
- **c** Denke eine Schnecke aus, die nach zwei Schritten so aussieht: 3 3 3
- **d** Kann die Form 3 3 3 nach 3 Schritten entstanden sein? Und nach 4 Schritten?

Im allgemeinen gilt auch: Hat die Schnecke einmal komplett die Startlinie überquert, so bleibt sie in ihrer Länge beschränkt. Darum geht es in der nächsten Aufgabe.

Argumentationsaufgabe 1.

Begründe, dass die Länge einer Schnecke, nachdem sie komplett die Startlinie passiert hat, nicht länger sein kann als *M*.

1B: Auf lange Sicht ...

Im Teil 1A war die Rede von einem Rennen, bei dem Start- und Ziellinie eng beieinander lagen. Das war vor allem gedacht, um die Fortbewegung der Schnecken zu untersuchen und auch die Geschwindigkeit mit dem sich der Schwanz bewegt.

Wir richten die Untersuchung jetzt auf die Entwicklung der Form einer Schnecke auf lange Sicht: wie verhält sich die Schnecke bei einem langen Rennen? Dann ist es praktisch vor allen Schritten die Schnecke vom Kopf aus zu betrachten, wie bei der Tour de France der Kopf der Gruppe von einem mitfahrenden Motorrad gefilmt wird.

Das kann hier geschehen, indem man die Schnecken rechts auslotet: stelle sie mit den Köpfen untereinander und lass alle Nullen, die links vom Schwanz stehen weg:

Beginn	1	2	1
Schritt 1	1	0	3
Schritt 2		2	2
Schritt 3	1	1	2
Schritt 4		1	3

Diese Notation wird auch in der Excel-Datei “Schnecke” benutzt, die zu der Aufgabe gehört. Die Datei hat zwei Seiten. Die erste Excel-Seite (mit dem Namen “Schneckenrennen”) kannst du benutzen, um schnell zu errechnen wie die Form einer Schnecke sich auf lange Sicht entwickelt. Das ist vor allem für größere Werte von M praktisch. Mit der zweiten Seite (“Film” genannt) kannst du in Ruhe Schritt für Schritt der Formveränderung der Schnecke folgen, die auf der ersten Seite blitzschnell durchgerechnet ist.
Es ist vernünftig zuerst selber mit dieser Notation etwas zu üben, bevor du mit der Excel-Datei arbeitest. Notiere die Form einer selbst gewählten Schnecke bei einigen folgenden Schritten.

Um schriftlich besser kommunizieren zu können, unterscheiden wir unterschiedliche Zahlen in einer Reihe durch das Setzen von Kommata; die Reihe selber wird durch Klammern festgelegt. Also 1 1 2 wird jetzt folglich schriftlich notiert als (1, 1, 2)

Untersuchung 5.
Du experimentierst mit Schnecken. Du kannst dabei die verfügbare Excel-Datei „Schnecke“ benutzen.

- **a** Betrachte $M = 3$. Untersuche bei allen Schnecken, wie sich ihre Form auf lange Sicht entwickelt. Wie beurteilst du folgende Vermutung?
  Eine Schnecke mit 3 Klötzen nimmt immer nach genügend vielen Schritten die Dreiecksform (1, 2) an.
- **b** Experimentiere mit $M = 6$. Erhältst du hier auch immer eine Dreiecksform?
- **c** Experimentiere jetzt mit $M = 4$ und formuliere eine Vermutung über eine mögliche Form, welche die Schnecken schließlich nach genügend vielen Schritten annehmen.
- **d** Führe die entsprechenden Überlegungen für $M = 5$ durch.
- **e** Wie sieht es mit $M = 7$ und mit $M = 8$ aus?

Die Schnecke (2, 2) entwickelt sich wie folgt:

$$(2, 2) \Rightarrow (1, 1, 2) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (2, 2) \Rightarrow (1, 1, 2) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (2, 2) \Rightarrow \ldots$$

Nach drei Schritten hat die Schnecke wieder ihre Anfangsform (2, 2) erlangt. Dann wiederholt sich, was schon einmal passiert ist. Und dieses Muster wird sich weiter wiederholen.

Wir nennen die Schnecke (2, 2) *periodisch* mit der *Periode* 3.

Auch Schnecke (3, 1) kommt nach einer Weile zu einer Musterwiederholung:

$$(3, 1) \Rightarrow (2, 0, 2) \Rightarrow (1, 0, 1, 2) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (2, 2) \Rightarrow (1, 1, 2) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (2, 2)$$
$$\Rightarrow (1, 1, 2) \Rightarrow (1, 3) \Rightarrow (2, 2) \Rightarrow \ldots$$

Die Anfangsform (3, 1) dieser Schnecke kommt aber nicht wieder. Wir sagen, dass so eine

Schnecke *auf lange Sicht periodisch* ist. Die Periode ist in diesem Fall auch 3.

Schnecken mit einer Dreiecksform, wie (1, 2, 3), sind außergewöhnlich: Sie haben die Periode 1. Eine Form mit der Periode 1 heißt auch *stabile Form.* Für die Dreiecksform ist es notwendig, dass *M* eine Dreieckszahl ist, wie 6 (= 1+2+3) oder 15 (= 1 + 2 + 3 + 4 + 5).

Untersuchung 6.

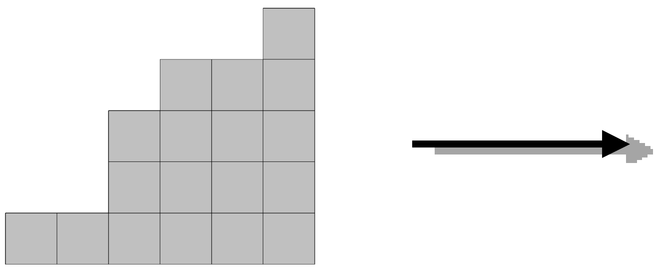
- **a** Begründe, dass jede Dreiecksform (1, 2, ..., *n*) stabil ist.
- **b** Sind noch andere stabile Formen möglich als die Dreiecksformen?

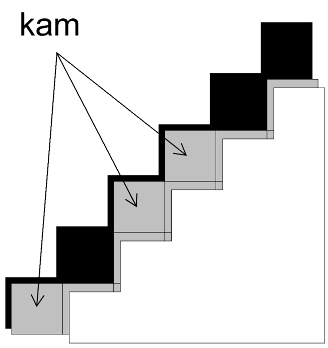
Für *M* = 6 und *M* = 10 gibt es Schnecken, die die Dreiecksform haben: (1, 2, 3) und (1, 2, 3, 4). Schnecken für zwischen liegende Werte von *M* (7, 8 und 9) können keine Dreiecksform bekommen. Was geschieht dann wohl?

Untersuchung 7.
Betrachte die Fälle *M* = 7 und *M* = 8 (von Untersuchung 5e) und weite deine Untersuchung auf den Fall *M* = 9 aus.

- **a** Wie verhalten sich diese Schnecken auf langer Sicht im Vergleich zu den beiden Dreiecksformen für *M* = 6 und *M* = 10?
- **b** Kannst du aus den letztendlichen Formen etwas über die Länge der Periode ableiten?

Wenn *M* keine Dreieckszahl ist liegt sie natürlich zwischen zwei aufeinanderfolgenden Dreieckszahlen. Betrachte die größtmögliche Dreieckszahl *a*, die kleiner als *M ist*. Betrachte auch die kleinstmögliche Dreieckszahl *b*, die größer als *M ist*. Es gilt $a < M < b$. Wir betrachten Formen von *M* Klötzen, für die gilt: Die Dreiecksform mit *a* Klötzen passt ganz hinein, und die Dreieckszahl mit *b* Klötzen enthält die betrachtete Form. Eine solche Form heißt *Kammform*.
Beispiel: *M* = 18. Die grau gezeichnete Schnecke hier unten hat eine Kammform.
In diesem Fall gilt *a* = 1+2+3+4+5 = 15 (im Bild unten das weiße Dreieck) und
b = 1+2+3+4+5+6 = 21 (im Bild unten das fast ganz verdeckte, schwarze Dreieck).





Die drei Klötze, die zwischen dem kleinerem und dem größerem Dreieck eingeklemmt sind, heißen der *Kamm*.

Untersuchung 8.

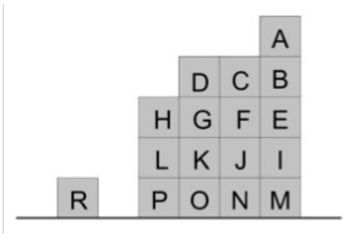
a Betrachte die Schnecke (1, 2, 3, 4, 9). Dies ist eine Dreiecksform, die auf dem Kopf noch 4 extra Klötze besitzt: (1, 2, 3, 4, 5 **+ 4**). Bekommt diese Schnecke in Folge eine Kammform?

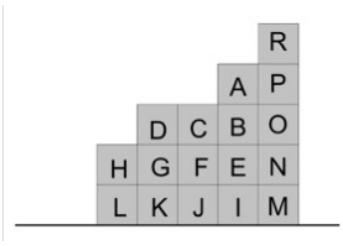
a Untersuche die folgende allgemeine Vermutung:
Wenn eine Schnecke dann eine Kammform hat, dann wird sie immer eine Kammform behalten.

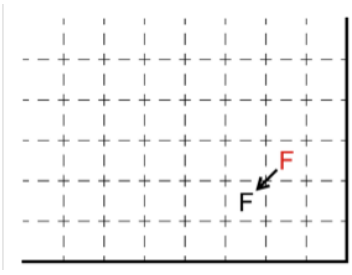
b Formuliere eine Vermutung über die Form des Kammes und der dazugehörigen Periode.

Bis jetzt hast du die Schnecken als reale Stapel von Klötzen und als Zahlenreihen gesehen. Wahrscheinlich hast du bei den Schritten den bequemsten Weg gewählt: von jedem Stapel

den oberen Klotz wegnehmen und diese vor der Schnecke gestapelt.
Weniger einfach in der Realität auszuführen, aber schriftlich wohl vorstellbar: Nimm von jedem Stapel den untersten Klotz weg und setzte ihn in der gleichen Reihenfolge vor die Schnecke. Dies ergibt natürlich das gleiche Resultat! Der Vorteil von dieser Herangehensweise ist, dass es möglich wird, den Weg eines jeden Klotzes bei den aufeinander folgenden Schritten zu folgen.
Als Beispiel siehst du jetzt eine Schnecke mit Klötzen, auf die Buchstaben aufgeklebt sind. Die unterste Reihe Klötze wird entfernt und an der Vorderseite aufgestellt. Alle Klötze (außer M) haben nach diesem Schritt eine andere Position in der Schnecke. Die untere Reihe (R PONM) wird vorne aufrecht gestellt. Alle anderen Klötze schieben sich eine Position nach links und nach unten. Für F ist das noch einmal separat angegeben.







Verfolge die Position von F in der Schnecke noch einige Schritte weiter. Wie verhalten sich die anderen Buchstabenklötze? In welcher Weise verhält R sich anders?

Periodische und stabile Schnecken sind besondere Beispiele von auf lange Sicht periodischen Schnecken. Manchmal dauert es sehr lange bevor eine Schnecke periodisch ist, wie bei (3, 5, 0, 0, 3, 6, 9, 2, 4, 5). Erst ab Schritt 47 fängt die Periode an:

Beginn	3	5	0	0	3	6	9	2	4	5
			....							
Schritt 47		0	1	2	3	4	5	7	7	8
Schritt 48		0	1	2	3	4	6	6	7	8
Schritt 49		0	1	2	3	5	5	6	7	8
...		0	1	2	4	4	5	6	7	8
		0	1	3	3	4	5	6	7	8
		0	2	2	3	4	5	6	7	8
		1	1	2	3	4	5	6	7	8
		0	1	2	3	4	5	6	7	9
		0	1	2	3	4	5	6	8	8
Schritt 56		0	1	2	3	4	5	7	7	8

Die letzte Aufgabe vonTeil 1 ist nicht gerade einfach! Damit kannst du dich als Team von den anderen abheben, wenn du am Wettbewerb teilnimmst.

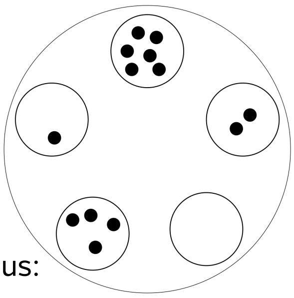
Argumentationsaufgabe 2.
Gib eine schlüssige Begründung für die folgende Behauptung:

Jede Schnecke ist, unabhängig von ihrer Anfangsform, auf lange Sicht periodisch.

Teil 2: Bohnen säen

In Teil 1 hast du die Formveränderung von Klötzchenstapeln betrachtet, bei denen du einen bestimmten Prozess in Gang gesetzt hast. Dir sind einige Vermutungen begegnet und einige Vermutungen hast du wohl beweisen können. In diesem Teil wirst du einen anderen Prozess untersuchen: das Säen von Bohnen in einer beschränkten Anzahl von Flächen. Die Aufgabe ist es hier, selber (zum Beispiel durch Experimentieren) Vermutungen aufzustellen und sie zu beweisen. Die Erfahrungen, die du mit der Schnecke gemacht hast, sind nützlich, denn auch hier wirst du Dingen begegnen wie Dreieckszahlen, Periodizität und Stabilität. Es wird sich zeigen, dass das Schneckenrennen und das Säen einander ein wenig gleichen!

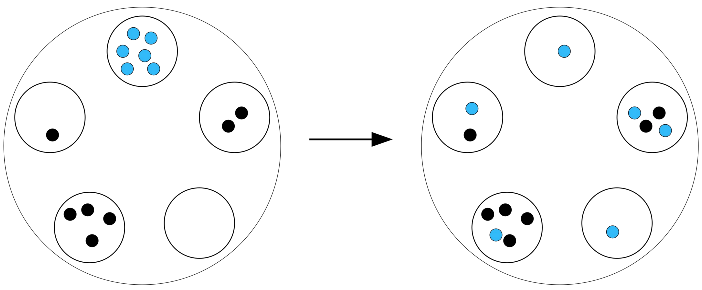
Du fängst mit n Schüsseln und M Bohnen an. Die Schüsseln stellst du gleichmäßig in einen Kreis und du verteilst die Bohnen in den Schüsseln. Die Verteilung braucht nicht gleichmäßig zu sein: Schüsseln dürfen leer sein oder fast alle Bohnen erhalten. Hier ein Beispiel mit $n = 5$ und $M = 13$:



Ein *Säschritt* sieht folgendermaßen aus:

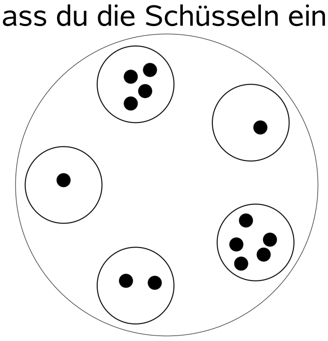
1. Du fängst bei der obersten Schüssel an. Hieraus holst du alle Bohnen und behältst sie in der Hand. (Aktion 1).

2.



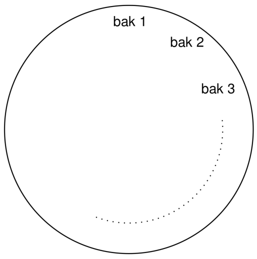
Danach gehst du im Uhrzeigersinn eine Schüssel weiter. Hier legst du eine Bohne hinein. In die nächste Schüssel legst du auch eine Bohne, usw. So füllst du nacheinander Schüssel für Schüssel im Uhrzeigersinn. Dies machst du so lange, bis deine Hand leer ist. Das ist Aktion 2. Das Ergebnis von Aktion 2, bei dem gegebenen Beispiel, ist also:

3. Die letzte Aktion (Aktion 3) ist, dass du die Schüsseln eine Stelle gegen den Uhrzeigersinn drehst:



Nach dieser letzten Aktion beginnt das weitere Verteilen wieder mit Aktion 1 und der obersten Schüssel als Startpunkt. Zeichne Beispiele, um die Wirkung der beiden folgenden Säschritte besser zu verstehen.

Wie bei der Schnecke ist es auch hier zeitraubend immer zeichnen zu müssen. Darum wird auch hier eine Zahlennotation benutzt. Nummeriere die Schüsseln von 1 bis *n* wie folgt:



Du kannst jetzt mit einer Zahlenreihe die Anzahl der Bohnen pro Schüssel angeben.

So heißt zum Beispiel (6,2,0,4,1): es gibt fünf Schüsseln (n = 5); die erste Schüssel enthält 6 Bohnen, die zweite 2, die dritte 0, die vierte 4 und die fünfte Schüssel 1 Bohne. Dies ist genau das Beispiel mit dem du angefangen hast. Die nächsten sechs Schritte sind:

Anfangssituation:	(6,2,0,4,1)
Nach dem ersten Schritt:	(4,1,5,2,1)
Nach dem zweiten Schritt:	(2,6,3,2,0)
Nach dem dritten Schritt:	(7,4,2,0,0)
Nach dem vierten Schritt:	(6,4,1,1,1)
Nach dem fünften Schritt:	(6,2,2,2,1)
Nach dem sechsten Schritt:	(4,3,3,2,1)

Auch für das Säen steht eine Excel-Datei (“Säen”) zur Verfügung, womit du schnell Säprozesse errechnen kannst.

Achte darauf, dass du bei der Nutzung der Excel-Seite beim Eingeben der Anzahl der Zahlen hinter “Anfangssituation” auch den Wert von *n* bestimmst.
Folgerung: bei der Eingabe der Startreihe (4, 5, 3, 2) passiert etwas ganz anderes als bei der Eingabe von (4, 5, 3, 2, 0). Im ersten Fall ist *n* gleich 4, im zweiten gleich 5.

Um dir auf den Weg zu helfen folgt hier ein Auftrag für den Säprozess mit vier Schüsseln (also n = 4). Behalte im Hinterkopf, dass du nachher selber Vermutungen ausdenken musst.

Untersuchung 11.

- **a** Die Anfangssituation ist (4,3,2,1). Wie sehen die nächsten Schritte aus? (Benutze eventuell Excel).
- **b** Die Anfangssituation ist (8,6,4,2). Wie sehen die nächsten Schritte aus?
- **c** Gib eine stabile Anfangssituation für den Fall, dass n = 4 und *M* eine Vielfaches von der vierten Dreieckszahl (4+3+2+1) ist.
- **d** Ein Beispiel für so eine Zahl ist $M = 2 \cdot (4+3+2+1) = 20$. Was geschieht in den dazugehörigen Anfangssituationen (20,0,0,0) und (2,9,9,0)?
- **e** Tritt in der Anfangssituation (21,0,0,0) Stabilität auf?
- **f** Füge noch ein oder zwei Bohnen hinzu. Was passiert?

Untersuchung 12.

Untersuche in einer vergleichbaren Weise den Säprozess für 5 Schüsseln (also n = 5).

Hauptuntersuchung bei Teil 2.

Wie entwickeln sich die Anzahl der Bohnen in den Schüsseln beim Säprozess mit *n* Schüsseln und *M* Bohnen?
Formuliere Vermutungen und versuche die Vermutungen zu beweisen.

$\boxed{\text{ENDE}}$