macht mathe

internationale Mathematikwettbewerbe

Die Wettbewerbe MACHT MATHE werden vom Ministerium für Schule und Weiterbildung in Zusammenarbeit mit dem Freudenthal-Institut Utrecht mit freundlicher Unterstützung des Landesverbandes Mathematikwettbewerbe NRW und der Universität zu Köln ausgerichtet.

Vorab

In der diesjährigen Aufgabe des B-Tages geht es um geknickte Linien, die vor allem im Computer als besondere Graphiken zum Vorschein treten.

Übersicht über die Aufgabe:

Teil A: Vorbereitungen
Hier lernt ihr die ersten – aber wesentlichen – Tricks und Kniffe zum zick-Zack-Geschehen kennen, vor allem die beiden Funktionen *zick* und *zack.* Darüber hinaus lernt ihr das Computerprogramm Geogebra kennen, falls es euch nicht bereits vertraut ist. Eine Anleitung zu Geogebra findet ihr in der Anlage.
Ihr bearbeitet *Einstiege*, an denen ihr das Zeichnen und Rechnen mit den Funktionen *zick* und *zack* erlernen sollt. Die Ausarbeitungen hierzu nehmt ihr nicht in eure Arbeit auf.

Teil B: Knickdesign - symmetrische und antiperiodische Bandmuster
In diesem Teil geht es um unendlich fortsetzbare Muster mit besonderen Eigenschaften. Es geht nicht nur um das Zeichnen mit dem Computer, sondern auch darum, zu *erklären*, was ihr mit Hilfe des Computers herausgefunden habt. Dies führt ihr in den *Denk- und Zeichenaufgaben aus (D&Z)*. Diese Ausarbeitungen gehören in eurer Endprodukt! In diesem Teil zeigt ihr eure Kreativität in *Eigenproduktionsaufgaben*.

Teil C: Einzahn-Funktionen
In Teil B habt ihr antiperiodische Muster erstellt, in diesem Teil zeigt ihr, dass ein antiperiodisches Muster aus der Basisfunktion *zick* konstruiert werden kann. Rechen- und Zeichnungsaufgaben werden wieder in das Endprodukt aufgenommen.

Teil D: 2-dimensionale zick-Zacken mit Geschwindigkeit und Animation
Nach dem theoretischen Teil C ist dies eine Verschnaufpause! Ihr lernt drei neue Elemente kennen, mit denen ihr eure zick-Zack-Kreativität noch verbessern könnt. Dies könnt ihr in Teil E verwenden.

Teil E: Abschlussauftrag
Erstellt ein statisches oder dynamisches (d.h. sich bewegendes) Muster nach eurem eigenen Design mit Hilfe aller Techniken aus den vorangegangenen Teilen.
Wie schon zuvor bei den kreativen Aufträgen, fügt ihr Abbildungen mit Erläuterungen in eure Ausarbeitung ein. Zusätzlich reicht ihr euer Ergebnis als .ggb-Datei ein.

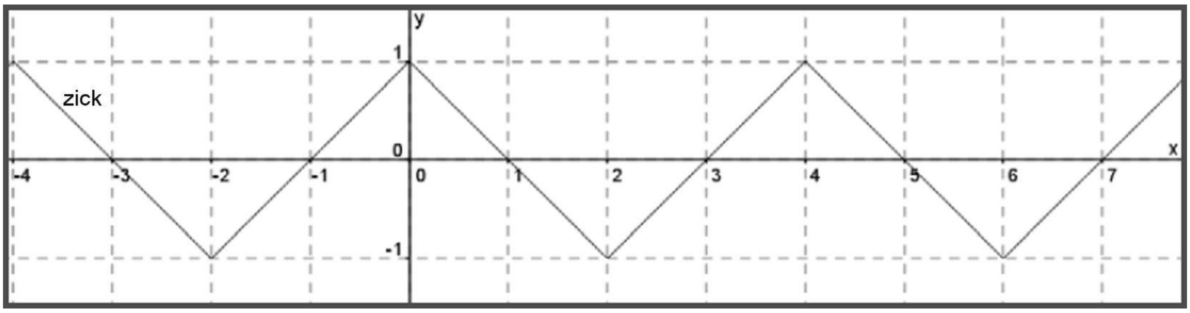
Regeln für den B-Tag 2010

Was macht ihr wann?
Ihr solltet die Teile A, B, C und einen Teil von D vor 13:00 Uhr durchgegangen sein, damit für eure eigenen Entwürfe in Teil E (und B) sowie für die Ausarbeitung eurer Arbeit genügend Zeit bleibt.
Was gebt ihr in Papierform ab?
Erläuterte Ausarbeitungen mit Zeichnungen zu den Rechen- und Zeichnungsaufgaben und den Eigenproduktionsaufgaben sowie zur Abschlussaufgabe. Besonders schön ist, wenn es euch gelingt, diese Arbeit als durchgängigen Text abzufassen, damit ein Leser, der zuvor nicht weiß, worum es in dieser Aufgabe geht, eure Darstellung genießen kann und gut versteht, worum es geht.
Wie werden die digitalen Dateien abgegeben?
Gebt nicht zu viele Dateien ab! Sucht die besten heraus und beschränkt euch auf maximal sechs Dateien. Um Chaos zu vermeiden, werden die Dateien nach einer festen Regel benannt: Der Dateiname setzt sich aus dem Schulcode, der Teamnummer (wenn mehrere Teams an einer Schule teilnehmen) und einem „echten" Namen zusammen. Wenn eure Schule beispielsweise den Code 116 hat, euer Team die Nummer 3 und ihr habt eine Schlange gezeichnet, dann heißt die Datei **116_3_Schlange.ggb**. Von dieser Regel dürft ihr nicht abweichen. In euren Erläuterungen verwendet ihr genau diese Dateinamen, um euch auf diese Dateien zu beziehen.

Teil A: Vorbereitungen

Die zick-Funktion ist eine periodische Knickfunktion

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der zick-Funktion:



Es wird deutlich, was gemeint ist:
- *zick*(*0*) = 1
- Der Graph von *zick* läuft mit konstanter Steigung zwischen 1 und -1 hin und her.
- Der Graph „wiederholt sich": *zick* hat die Periode 4.

Die Punkte, in denen sich die Steigung des Graphen ändert, heißen *Knickpunkte*.
Im Beispiel der Funktion *zick* sind (0, 1) und (2, -1) *Knickpunkte*. Auf Grund der Periodizität alle Punkte (4*k*, 1) und (4*k* + 2, -1), wobei *k* eine ganze Zahl ist, ebenfalls Knickpunkte.

Einstieg 1.

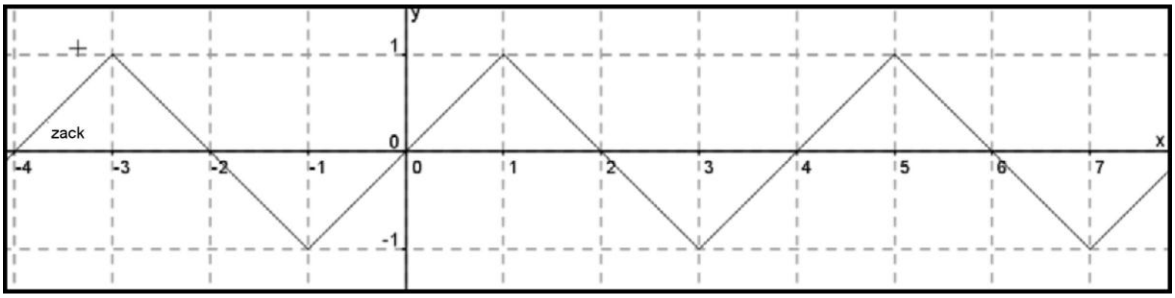
a. Bestimmt *zick*(*x*) für *x* = 1, für *x* = 2006, für *x* = 0,7 und für *x* = -511,3.

b. Für welche Werte von *x* aus dem Intervall [0, 8> gilt *zick*(*x*) = 3/4? (Siehe Fußnote[1].)

c. Was sind die Knickpunkte von 2 · *zick*(*x*) und von 0,5 · *zick*(*x* - 1)?

Die Familie von zick und zack

Im folgenden Diagramm ist der Graph von *zack*, dem kleinen Bruder von *zick*, abgebildet:



Einstieg 2.

a. Berechnet *zack*(*x*) für *x* = 2, für *x* = 2007, für *x* = 1,7 und für *x* = -510,3.

b. Welche Knickpunkte hat der Graph von *zack*?

Die *zick*-Funktion ist ein Beispiel für eine *periodische Knickfunktion*. Eine periodische Knickfunktion ist eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:
- Die Funktion ist periodisch.
- Der Graph der Funktion besteht aus geraden Linien unterschiedlicher Steigung, die jeweils mit dem Endpunkt genau an den Anfangspunkt des folgenden Abschnitts anschließen. Die Anschlusspunkte heißen *Knickpunkte.*

Die Steigungen von Knickfunktionen müssen also nicht 1 oder -1 sein. Auch müssen sich positive und negative Steigungen nicht immer abwechseln.

Einstieg 3.

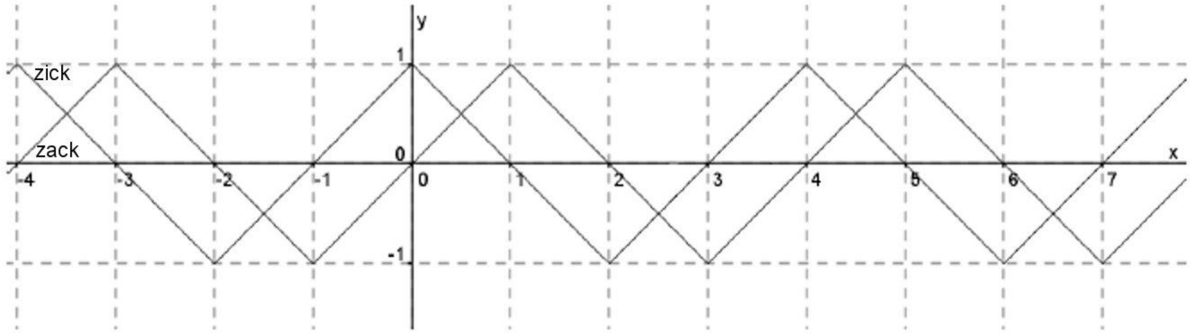
Skizziert den Graphen einer periodischen Knickfunktion der Periode 5, deren Knickpunkte (1, 0), (2, 3) und (4, -1) sind (die Steigung des Graphen muss nicht überall -1 oder 1 sein).
Ist (1001, -1) ein Knickpunkt des Graphen?

---

[1] Mit [0, 8> ist gemeint: Die Zahl 0, alle Zahlen zwischen 0 und 8, aber NICHT die Zahl 8 selbst.

Verschiebungen

Die Graphen von *zick* und *zack* sind im folgenden Diagramm gemeinsam abgebildet:



Einstieg 4.

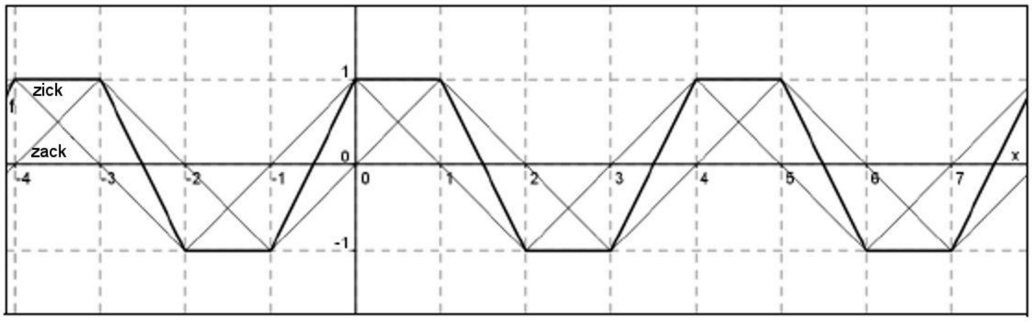
a. Zeichnet den Graphen von $y = zick(x - 2)$ ein. Diesen Graphen erhaltet ihr, indem ihr den Graphen *zick*(x) um 2 Einheiten nach rechts verschiebt..

b. Zeichnet außerdem den Graphen von $y = zick(x - 3)$ ein. Warum ergibt der Graph von $y = zick(x +1)$ dasselbe Resultat wie der Graph von $y = zick(x - 3)$?

c. Begründet, dass die folgende Gleichung gilt: $zack(x) = zick(x - 1)$

Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren

Außer Funktionsgraphen zu verschieben (wie es gerade behandelt wurde), kann man auch Funktionen addieren. Das folgende Diagramm enthält die Graphen der Funktionen *zick*(x), *zack*(x) und der summierten Funktion *zick*(x) + *zack*(x). Der Graph der letztgenannten Funktion ist etwas dicker gezeichnet.



Einstieg 5.

a. Überprüft, ob der Graph der Summenfunktion *zick(x)* + *zack(x)* richtig eingezeichnet wurde, indem ihr dies an den Stellen der Knickpunkte von *zick* und denen von *zack* über dem Intervall [0, 4> überprüft. Begründet, dass die Überprüfung an diesen vier Stellen genügt und die dazwischen liegenden Punkte nicht mehr überprüft werden müssen.

b. Zeichnet den Graphen von $y = zick(x) + zick(x - 1/2)$. Erstellt gegebenenfalls eine Tabelle mit den Punkten, die ihr dafür braucht: den Knickpunkten von *zick(x)* und denen von *zick*(x - 1/2).

c. Zeigt, dass für alle Werte von x gilt: $zick(x) + zick(x - 1) + zick(x - 2) + zick(x - 3) = 0$.

Weitere Untersuchungen mit Hilfe von Geogebra am Computer

Durch eigenes Zeichnen, Berechnen und Argumentieren habt ihr nun Einsicht gewonnen in die Eigenschaften der Funktionen *zick*(x), den verschobenen Familiemitgliedern *zick*(x - a) sowie in die Zusammenhänge zwischen den Funktionen. Die Graphen dieser Funktionen sollen nun mit dem Computerprogramm Geogebra gezeichnet werden. Ihr bearbeitet zunächst einige Einstiege in den Gebrauch von Geogebra.

Einstieg 6.

Mit Geogebra kann man ganz leicht Funktionsgraphen zeichnen. In dieser Aufgabe lernt ihr, wie das geht:

a. Startet Geogebra; falls nötig, schaut in der Anleitung (Anlage) nach, wie es geht.

b. Setzt den Cursor in das Eingabefeld, das ihr ganz unten auf dem Bildschirm seht. Gebt $f(x) = 2 - x/2$ ein und bestätigt die Eingabe mit der Taste „Enter“. Ihr stellt nun fest:
- dass der Graph gut gezeichnet ist,
- dass die Gleichung von *f* auch in der linken Spalte, dem Algebrafeld, erscheint,
- dass man den Graphen von *f* verbergen und erscheinen lassen kann, indem man die Kugel links neben der Gleichung von *f* anklickt.

c. Gebt in das Eingabefeld $g(x) = f(x) + f(x + 2)$ ein. Ihr stellt fest, dass man sehr schnell einen weiteren Graphen zeichnen kann, für den man $f(x)$ als Baustein verwendet.

d. Nach Rechtsklick auf *f* oder *g* (im Algebrafeld) erscheint ein Menu. Wenn ihr den Menupunkt „Eigenschaften“ wählt, erhaltet ihr die Möglichkeit, die Liniendicke oder die Farbe der Linie zu verändern. Es gibt noch viel mehr Möglichkeiten mit diesem Werkzeug zu arbeiten.
- Probiert die beschriebenen Aktionen aus.
- Probiert aus, wie man mit Hilfe des Menupunktes „Eigenschaften“ die Gleichung von *f* von $f(x) = 2 - x/2$ in $f(x) = 3 - x/3$ verändern kann. Verwendet die Registerkarte „Grundeinstellungen“. Verändert sich *g* mit?

***Vorsicht in Geogebra*: Verändert sich g mit?**

In den „Eigenschaften“ von g beobachtet ihr keine Veränderung, im Algebrafenster (links auf dem Bildschirm) könnt ihr dennoch eine Veränderung beobachten. Behaltet also beide gut im Blick.

e. Zwei letzte Handhabungen zum Kennenlernen:
- Verschiebt das Zeichenblatt mit SHIFT + Ziehen mit der Maus.
- Vergrößert und verkleinert die Zeichnung mit dem Scrollrad der Maus oder über das Menu rechts oben. Falls nötig, nehmt die Anleitung zu Hilfe.

f. Löscht *f* und *g*. Das ist etwas anderes als das Verbergen! Wenn ihr *f* zuerst löscht, dann löscht Geogebra auch *g*. Das muss so sein, da *g* ja von *f* abhängt.

***Vorsicht in Geogebra*: Namen von Formeln**

Wenn man in Geogebra die Gleichungen in der Weise eingibt, wie oben beschrieben, also als
f(x) = 2 - x/2** und nicht als* ***y = 2 - x/2,
dann hat man keine Probleme. Man kann dann die Formel mit ihrem Namen ***f*** *verwenden um Dinge wie z. B.*
g(x) = f(x) + f(x + 2)
zu definieren.
Namen kann man selbst wählen, man muss sich aber an folgende Regeln halten:
- *Der Name muss mit einem Buchstaben beginnen. Danach können auch Ziffern folgen.*
- *Es dürfen keine Leerzeichen im Namen vorkommen.*

Wenn ihr euch nicht an die Regeln haltet, gibt Geogebra Fehlermeldungen oder macht unerwartete Bocksprünge!
Soweit die kurze Einführung in Geogebra. Wir werden Geogebra nun verwenden, um *zick* und seine Familienmitglieder näher zu untersuchen.

***zick* und *Zack* in Geogebra**

Einstieg 7.
Ihr habt zwei Möglichkeiten, den Graphen der Funktion *zick*(*x*) mit Geogebra zu zeichnen.
ERSTENS: Öffnet mit Geogebra die Datei *zigzack.ggb*. [In eurer Schule erfahrt ihr, wo ihr diese Datei findet.] Ihr seht *zick* und *zack* nun als Graphen und durch Gleichungen auf dem Bildschirm dargestellt.
ZWEITENS: Ihr gebt selbst eine Formel für zick ein und definiert hierüber dann zack.
Gebt genau das folgende ein:

zick(*x*) = *abs*(*x* - 4 * *floor*(*x*/4) - 2) – 1
zack(*x*) = *zick*(*x* - 1)

Einstieg 8

Übungen mit *zick* und *zack*.

- **a.** Gebt $som(x) = zick(x) + zack(x)$ ein und überprüft die Graphen von Einstieg 5.
- ***b.*** Gebt eine Vorhersage über die Knickpunkte von $h(x) = zick(x) - 1/2\ zick(2x)$ *ab und überprüft eure Vorhersage mit Hilfe von Geogebra. Speichert diese Formel für den späteren Gebrauch.*

Einstieg 9

(Diesen Einstieg dürft ihr auch überschlagen. Für den Rest der Aufgabe braucht ihr diese lange Formel für zick nicht. Andererseits: Wenn ihr diesen Einstieg doch bearbeitet, erlernt ihr eine Technik, die in anderen Situationen sehr nützlich sein kann ...)

Untersucht mit Hilfe der Anleitung im folgenden Kasten, was in der langen Formel für *zick* eigentlich passiert.

zick(x) = abs(x - 4* floor(x / 4) - 2) – 1

Diese Formel könnt ihr verstehen lernen, indem ihr sie Schritt für Schritt von innen her wachsen lasst und bei jedem Schritt beobachtet, wie sich der Graph verändert.

1. Beginnt mit der Definition von
   floor(x).
   Die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist, heißt *floor*(x). Der Graph besteht deshalb aus immer höher liegenden horizontalen Linien. Es gilt z. B. *floor*(6,5) = *floor*(6).
2. Verbreitert den Graphen mit dem Faktor 4 in x-Richtung:
   floor(x/4)
3. Vergrößert den Graphen mit dem Faktor 4 in *y*-Richtung:
   *4*floor(x/4)*
4. Die Differenz zum Graphen der Funktion mit der Gleichung $y = x$ läuft immer von 0 bis 4:
   *x - 4*floor(x/4)*

Erläutert selbst die Veränderung des Graphen in den folgenden drei Schritten:

5. *x - 4*floor(x/4) - 2*
6. *abs(x - 4*floor(x/4) - 2)*
7. *abs(x - 4*floor(x/4) - 2) - 1*

Teil B:
Knickdesign - symmetrische und antiperiodische Bandmuster

A thing of beauty is a joy forever [2]

Das stimm sicherlich. Es stimmt ganz besonders, wenn es um ein schönes Muster geht, das unendlich fortgesetzt werden kann, wie dies bei den periodischen Funktionen des heutigen Tages der Fall ist. Ihr mögt einwenden, dass es ganz oft am Beobachter liegt, ob er etwas schön findet: *Beauty is in the eye of the beholder*[3]. Bei den zwei Knickgraphen der ersten *D&Z*-Aufgabe, die ihr zu einem regelmäßigen Muster aus vier Knickgraphen mit Symmetrien ergänzen werdet, ist allerdings kein Zweifel möglich.
Diese Aufgaben werden – ausgearbeitet und ausführlich erläutert – in eure Arbeit mit aufgenommen!

[2] John Keats, in seinem epischen Gedicht Endymion, 1818.
[3] Margaret Wolfe Hungerford, in dem Roman Molly Bawn, 1878.

D&Z-Aufgabe 1. Ein Bandmuster aus 4 Funktionen mit Zusammenhang, Teil 1

a. Öffnet ein leeres Fenster und gebt ein

$h(x) = zick(x) - 1/2\ zick(2x)$.

Zeichnet auch den Graphen der verwandten Funktion:

$j(x) = zick(x) - 2\ zick(x/2)$

b. Zeigt algebraisch, dass folgender schöner Zusammenhang für die Funktionen gilt:

$j(x) = -2\ h(x/2)$

Hinweis zum letzten Auftrag "zeigt algebraisch":
Zu zeigen ist, dass j(x) und - 2 h(x/2) eigentlich dieselben Terme wiedergeben. Beginnt den Beweis mit dem größten Term und führt aus, was dort steht. Anstelle von x müsst ihr nun also x/2 verwenden:
- 2 h(x/2) = -2 (zick(x/2) - 1/2 zick(2 x/2)) = ...
Ausklammern, Vereinfachen, usw. Kommt ihr schließlich auf die Gleichung für j(x)?

c. Beurteilt nach ästhetischen[4] Kriterien, welcher der zu folgenden Funktionsgleichungen gehörigen Graphen das Muster der Graphen von h und j am schönsten ergänzt:

$k(x) = 3/2 - h(x)$ oder $k(x) = 5/2 - h(x)$

d. Ergänzt den Graphen einer vierten Funktion zu den drei vorhandenen so, dass das entstehende Muster eine horizontal Symmetrieachse hat.

Achtung: Teile von Geogebra-Bildern bindet ihr folgendermaßen in eure Arbeit ein:

- *Verwendet die Taste ESC oder klickt den Button 'Bewegen''*
- *Markiert durch Ziehen mit der Maus ein Rechteck um den Teil, den ihr einbinden wollt.*
- *Wählt im Menu **Bearbeiten** (oder Edit) die Option **Grafik-Ansicht in die Zwischenablage.***
- *Wählt in eurer Datei den Menupunkt "einfügen".*

Schönheit über einen Schieberegler optimieren

Ist $k(x) = 3/2 - h(x)$ am besten oder $k(x) = 5/2 - h(x)$? Vielleicht ist es $k(x) = a - h(x)$ für einen noch herauszufindenen Wert von a. Mit Hilfe von Geogebra kann man effizient den ästhetisch besten Wert von a herausfinden. Das geht folgendermaßen:

Schritt 1: Erstellt einen Schieberegler, um a über einen gewissen Bereich zu variieren.
Schritt 2: Verwendet $k(x) = a - h(x)$ an Stelle der zuvor verwendeten Funktionsgleichung. Die vierte Funktionsgleichung (von D&Z Aufgabe 1d) passt ihr so an, dass die Symmetrei erhalten bleibt.

Schritt 2 liegt auf der Hand, aber Geogebra braucht zuerst Schritt 1, damit a bekannt ist.

***Erstellt den Schieberegler folgendermaßen*:**

- Gebt in das Eingabefeld $a = 1$ ein.
- a erscheint nun im Algebrafenster. Klickt auf die Kugel, um a sichtbar werden zu lassen.
- Später (oder jetzt) passt ihr den Schieberegler über das Menu „Eigenschaften" an.

D&Z-Aufgabe 2. Ein Bandmuster aus 4 Funktionen mit Zusammenhang, Teil 2

a. Erstellt einen Schieberegler auf dem Schirm. Beachtet, dass zur Veränderung von Termen erst *ESC gedrückt oder der Button "Bewege" angeklickt werden muss. Hierzu seht euch gegebenenfalls die Kurzanleitung zu Geogebra an.*

b. Verwendet den Schieberegler, um einige ästhetisch ansprechende Muster zu finden..

c. Ihr habt gesehen, dass der Graph der Funktion k mit der Gleichung $k(x) = a - h(x)$ das Spiegelbild des Graphen von h an einer horizontalen Geraden ist. Welche Gerade ist das?

---

[4] Ästhetik ist die Wissenschaft von Geschmack, Stil und Schönheit.

Eigenproduktions-Aufgabe 1. Bandmuster aus mehreren Funktionsgraphen entwerfen
Es ist nichts dagegen einzuwenden, weitere Schieberegler zu benutzen oder den Wert eines Reglers an unterschiedlichen Stellen zu verwenden. Auf diese Weise kann man allerlei hübsche und überraschende Muster erstellen, wenn man von den Funktionen *zick*, Verschiebungen von *zick* und Varianten wie *zick*(2 *x*) oder *zick*(*x* / 3) ausgeht. Entwerft zwei unterschiedliche, ansprechende und interessante Bandmuster mit oder ohne Symmetrie zu einer horizontalen Geraden.

Symmetrische Muster , symmetrische Funktionen
Gerade wurde die Symmetrie zu einer horizontalen Geraden betrachtet. Spiegelsymmetrie einer Funktion zu einer vertikalen Geraden war ebenfalls immer vorhanden. Der Graph der Funktion *zick*(*x*) ist symmetrisch zur y-Achse.
Um Spiegelungen an vertikalen Achsen, wie der Achse zu x=0, geht es in der folgenden Denk- und Zeichnungsaufgabe.

D&Z-Aufgabe 3. Spiegelsymmetrie Finden
Die Spiegelsymmetrie des Graphen von *zick* an der y-Achse *x* = 0 lässt sich durch eine Gleichung ausdrücken: *zick(-x) = zick(x)*
Dies bedeutet ganz einfach, dass *zick* in den symmetrisch zu 0 liegenden Werten *x* und -*x* denselben Wert hat..

- **a.** Zeigt, dass *zick*(*x* - 1/2) *nicht* spiegelsymmetrisch zur y-Achse *x* = 0 ist.
- **b.** Zeigt, dass die Funktion *zick*(*x* + 1/2) + *zick*(*x* - 1/2) spiegelsymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung *x* = 0 (y.Achse) ist.
- **c.** Der Wert 1/2 ist nur ein Beispiel. Untersucht nun die Funktionen mit den Gleichungen zick(x - a) und zick(x + a) + zick(x - a) auf Symmetrie in vertikalen Geraden für Werte von a in [0, 4>. Wo liegen die Symmetrieachsen?

D&Z-Aufgabe 4. Spiegelsymmetrie, andere Achsen
Der Graph der Funktion *zack*(*x*) ist nicht symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung *x* = 0, aber schon zur Geraden mit der Gleichung *x* = 1. Das kann man algebraisch ausdrücken, indem man zeigt, dass die Funktion an zwei Stellen, die auf der x-Achse symmetrisch zu 1 liegen, denselben Wert annimmt:

zack (1 - *x*) = *zack*(1 + *x*)

- **a.** Zeigt algebraisch, dass die Gleichung gilt, indem ihr die Definition von *zack verwendet*.
- **b.** Welches sind die Symmetrieachsen der Funktionen *h* en *j* aus D&Z-Aufgabe 1?
- **c.** Nehmt an, dass *n*(*x*) und *m*(*x*) Funktionen mit der vertikalen Symmetrieachse *x* = *b* für einen anderen Wert von *b* sind. Zeigt algebraisch, dass dann die Funktion mit dem Term 3 *n*(*x*) - 7 *m*(*x*) auch die Symmetrieachse *x* = *b* hat.
- **d.** Einen Term wie 3 *n*(*x*) - 7 *m*(*x*) bezeichnen wir als Linearkombination der Funktionen *n* en *m*. Formuliert nun eine möglichst allgemeine Behauptung (von der c ein Bestandteil ist) über die Symmetrie von Linearkombinationen.
  Hinweis: Die Behauptung kann folgendermaßen beginnen:
  Wenn die Funktionen ..., ... symmetrisch in *x*=*c*, ...

Antisymmetrie

Die Funktion *zack* ist nicht symmetrisch zur vertikalen Achse *x* = 0, da *zack(-x) ungleich zack(x)* ist. Es gilt dagegen schon
zack(-*x*) = -*zack*(*x*).
Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir ***antisymmetrisch*** zur vertikalen Achse *x* = 0.
Die Funktion *zick* is antisymmetrisch zur Geraden *x* = 1, denn: *zick*(1 - *x*) = -*zick*(1 + *x*)

Einstieg 10

- **a.** Gibt es außer der Achse mit *x* = 1 noch andere vertikale Geraden, zu denen *zick* antisymmetrisch ist?
- **b.** Gilt eure Behauptung aus der D&Z-Aufgabe 4d auch für Antisymmetrien und Linearkombiantionen?

Periodizität

Bislang haben wir immer Funktionen mit der Periode 4 betrachtet. Diese Voraussetzung werden wir beinahe bis zum Ende diser B-Tag-Aufgabe zu Grunde legen. Eine Funktion hat die Periode 4, wenn für alle *x* gilt:

$$f(x + 4) = f(x)$$

Eine solche Funktion hat damit auch die Periode 8, 12, 16 usw. Der Beweis dafür geht so:
$f(x + 8) = f(x + 4 + 4) = f(x + 4) = f(x)$

D&Z-Aufgabe 5. Periodizität und (Anti)symmetrie

- **a.** Zeige algebraisch: Wenn *f die Periode* 4 hat und achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = a$ ist, dann hat *f* auch die Symmetrie-Achse $x = a + 4$.
- **b.** Zeige, korrigiere oder gib ein Gegenbeispiel:
- – Linearkombinatioinen von Funktionen mit Periode 4 haben auch Periode 4.
- – Wenn *f* Periode 4 hat mit Symmetrie-Achse $x = a$, dann hat *f* auch die Symmetrie-Achse $x = 4 - a$.

Antiperiodische Funktionen

Sowohl für *zick* wie auch für *zack* gilt, dass sie sich in der zweiten Hälfte des Intervalls [0, 4> entgegengesetzt zu ihrem Verhalten in der ersten Hälfte zeigen. Algebraisch formuliert geht es um den Vergleich der Werte, die zu x+2 und x gehören.
$zick(x + 2) = -zick(x)$
$zack(x + 2) = -zack(x)$
Funktionen mit dieser Eigenschaft nennen wir ***antiperiodisch mit Periode 2.*** Wieder gilt für Linearkombinationen von Funktionen, die ... usw.

D&Z-Aufgabe 6. Beispiele konstruieren

Zeichnet Graphen von Funktionen mit Periode 4. Konstruiert drei Beispiele:

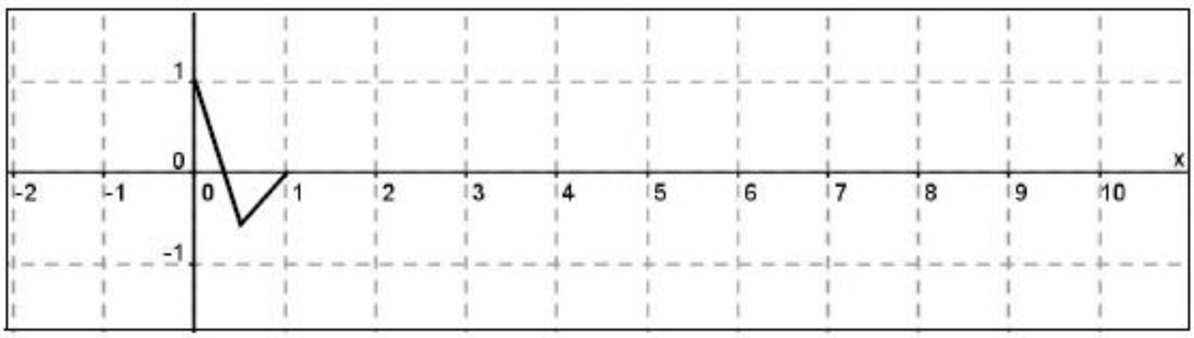
- **a.** Für eine Funktion, die antiperiodisch mit Periode 2 und antisymmetrisch in der Geraden x=2 ist.
- **b.** Für eine Funktion, die NICHT antiperiodisch mit Periode 2, wohl aber antisymmetrisch in der Geraden x=2 ist.
- ***c.*** Für eine Funktion, die zwar antiperiodisch mit Periode 2, NICHT aber antisymmetrisch in der Geraden x=2 ist.

D&Z-Aufgabe 7. Antiperiodisch, also auch periodisch!

Zeit algebraisch: Eine antiperiodiosche Funktion mit Periode 2 ist automatisch periodisch mit Periode 4.

D&Z-Aufgabe 8. Vervollständigen

Über die Funktion, von deren Graphen nur ein Teil eingezeichnet wurde, ist bekannt, dass sie antiperiodischmit Periode 2 ist und eine Symmetrie zur y-Achse vorliegt. Vervollständigt den Funktionsgraphen.



Zusammenfassung

Ihr habt nun die vier Eigenschaften (Anti)symmetrie und (Anti)periodizität von Funktionen und deren Graphen kennengelernt. Darüber hinaus habt ihr gesehen, dass für Funktionen, die solche Eigenschaften bezüglich einer bestimmten Achse oder Periode besitzen, auch die Linearkombinationen dieser Funktionen diese Eigenschaften besitzen.

Eigenproduktions-Aufgabe 2. Bandmuster mit Anti-Merkmal

Entwerft zwei unterschiedliche interessante Bandmuster mit Periode 4 nach eigener Idee

- bestehend aus einem oder mehreren Graphen von Knickfunktionen
- die Graphen mit diversen (Anti)symmetrien um x = 0, x = 1, x =2 en x = 3 enthalten
- deren Muster mit Hilfe eines Schiebereglers beeinflusst werden kann.

Nehmt von euren Mustern einige sehr unterschiedliche Varianten (Zustände unterschiedlicher Reglereinstellungen) in eure Auarbeitung auf. Wählt auch eine Geogebra-Datei aus, die ihr eurer Ausarbeitung beilegt.

Teil C: Einzahnfunktionen

In Teil B habt Ihr antiperiodische Funktionen erzeugt, indem Ihr verschieden Kombinationen *zick*-Funktionen und ihren verrückten (bzw. verschobenen) Familienmitgliedern eingesetzt habt. In diesem Teil zeigt Ihr, dass – in gewissem Sinne – jedes antiperiodische Muster aus den Basisfunktionen erzeugt werden kann. Die zugehörigen *Denk- und Zeichenaufgaben* kommen natürlich wieder in Euren Abschlussbericht.

Zunächst stellen wir dazu antiperiodische Funktion auf, die genau in einem Knickpunkt den Wert 1 haben und (notwendigerweise) in einem anderen Knickpunkt den Wert -1 annimmt – an beinahe allen anderen Stellen jedoch sollen diese Funktionen den Wert 0 annehmen: die *Einzahnfunktionen*. Später kombinieren wir verschiedene solcher Funktionen miteinander.

Die Konstruktion knüpft bei der symmetrischen Funktion *zick*(x - a) + *zick*(x + a) an.

D&Z-Aufgabe 9. Die Seiten egalisieren

a. Gebt in Geogebra die folgende Funktionsvorschrift ein:

$$azi(x) = zick(x - a) + zick(x + a).$$

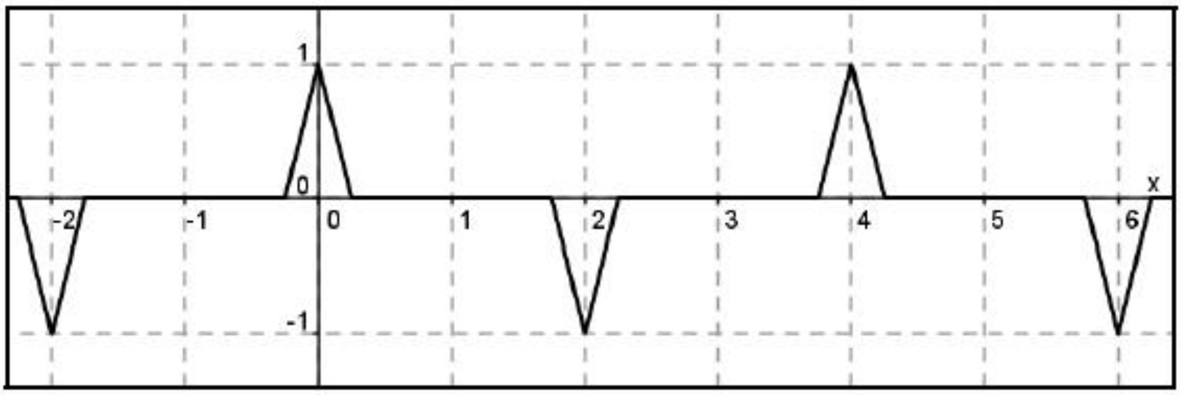
b. Diese Funktionsvorschrift werden wir für verhältnismäßig kleine Werte von a benutzen. Untersucht, was mit dem Funktionsgraphen geschieht, wenn a von 0 nach 1 läuft.

c. Die schrägen Seiten des Graphen sind sehen den schrägen Seiten der Funktion 2 *zick*(x) sehr ähnlich. Oder anders gesagt: Wenn wir die *Differenz* der Funktion 2 *zick*(x) und der Funktion aus Teil ***a*** betrachten, dann muss diese für die meisten Werte von x gleich Null sein, jedoch in Umgebungen der Stellen x = 0, x = 2 und x = 4 nicht. Versucht, dies mit Geogebra sichtbar zu machen.

d. Argumentiert nun, warum die Funktion mit der Vorschrift

$$zahn(x) = 1/(2\,a)\ (\ 2\ zick(x) - zick(x + a) - zick(x - a)\ )$$

für den Wert a = 1/4 den unten gezeichneten Funktionsgraphen besitzt.
Probiert es auch mit Geogebra aus!



e. Zeichnet auch die Graphen für a = 0.1 und 1.

f. Erkärt die folgenden Beobachtungen:

- die Funktion *zahn*(x) ist antiperiodisch (mit Periode 2)
- die Breite des Bergfußes, d.h. die untere Breite des Zackens, beträgt 2a.
- das maximale Wert ist 1 (bei jedem Wert von a > 0).
- betrachtet nun auch die Funktionen *zahn*(x - a) und *zahn*(x - 2a). Für diese Funktionen gilt, dass deren Maxima genau über den Anstiegspunkten zu den Zacken der Funktion *zahn*(x) liegen.

Funktionen mit vorgegebenen Knickpunkten erzeugen

Falls man bei einer antiperiodischen Knickfunktion mit Periode 4 die Knickpunkte im Intervall [0, 2) kennt, dann weiß man alles über diese Funktion. Denn aus der Antiperiodizität folgt, wie sich die Funktion auf [2, 4) verhält und durch die Periodizität kennen wir dann die Funktion überall.
Stellt Euch zunächst als erstes Beispiel fünf Knickpunkte in [0,2) vor, deren x-Koordinaten wie folgt verteilt sind:

	0	*1 ·4/10*	*2 ·4/10*	*3 ·4/10*	*4 · 4/10*

Wir werden nun eine Funktionsvorschrift aufstellen, die an diesen Stellen die folgenden Werte annimmt.

	4	*3,5*	*2*	*-1*	*-2.*

Der Plan: Wähle für jeden der Knickpunkte die richtige *Einzahnfunktion* und addiere diese.

Wählt als *a*-Parameter in *zahn*(*x*)*: a = 4/10*. Damit verteilt Ihr [0, 4] in genau 10 gleiche Intervalle. Der Anstiegspunkt der Einzahnfunktion mit dem Maximum bei 0 liegt dann genau auf dem zweiten Knick. Also hat 4·*zahn*(*x*) den Wert 4 im ersten Knickpunkt und in den anderen Knickpunkten den Wert 0:

4·*zahn*(*x*):	*4*	*0*	*0*	*0*	*0*

Um nun den Wert 3,5 auf dem zweiten Knickpunkt zu erhalten benutzen wir die Funktionsvorschrift 3*,5·zahn(x - 4/10)*.

3.5·*zahn*(*x* - 4/10)*:*	*0*	*3,5*	*0*	*0*	*0*

Die Funktion 4 · *zahn*(*x*) + *3,5* · *zahn*(*x* - 4/10) hat nun schon bei den ersten beiden Knickpunkten den richtigen Wert und an allen anderen Knickpunkten bei allen anderen!

D&Z-Aufgabe 10. Das Beispiel zu Ende denken

a. Schreibt die Funktion auf, die genau die *fünf* angegebenen Knickpunkte besitzt.
b. Bestätigt dies nochmal mit Geogebra.

Die Funktion, die Ihr soeben aufgestellt habt, nennen wir eine *5-Punktsfunktion,* da wir 5 Knickpunkte auf dem Intervall [0, 2) definiert haben. Auf einer ganzen Periode von 4 finden sich also 10 Knickpunkte.
Es versteht sich von selbst, dass die Methode auch funktioniert, wenn 10, oder 17, oder allgemein *n* Knickpunkte auf dem Intervall [0, 2) vorgeschrieben sind.

c. Welchen Wert für *a* muss man in diesen Fällen wählen? Gebt eine Formel in *n*, die den geeigneten Wert für *a* liefert.

Die antiperiodischen Funktionen mit *n* Knickpunkten in [0, 2) nennen wir *n-Punktsfunktion*en. Wir werden mit Geogebra eine Reihe von *n-Punktsfunktionen* erzeugen.

Achtung: Geogebra benutzt natürlich einen Wert für *a* für alle Funktionsvorschriften gleichzeitig. Wenn Ihr also *a* = 4/12 = 1/3 setzt, um mit eine 6-Punktsfunktion zu arbeiten, verändern sich die zuvor aufgestellten 5-Punktsfunktionen.
Es gibt hierzu eine einfache Lösung: legt für Eure 6-Punktsfunktion eine neue Datei an.

Tut dies am besten SICHER und geht dabei wie folgt vor:

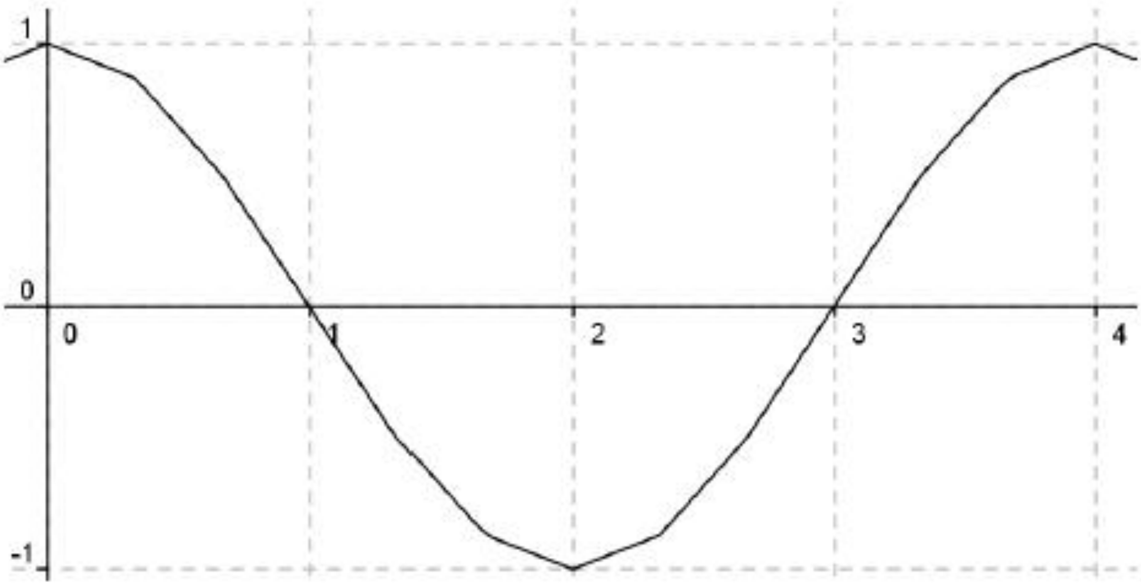
1. Speichert die bisher gemachte Arbeit unter einem selbstgewählten Namen.
2. Bewahrt eine Kopie dieser Dateien unter einem anderen Namen über den Menüpunkt ***Speichern unter*** (unter Datei) und gebt dem einen Namen, in dem eine 6 steht, beispielsweise: *schulnr_teamnr_Zahn6funktionen.ggb*
3. Macht alles, was für die Konstruktion gebraucht wird, Ihr jedoch nicht mehr sehen wollt, unsichtbar. Ihr könnt auch vorsichtig ‚Löschen‘ oder ‚Entfernen‘ benutzen.

Ihr werdet nun selbst eine 6-Punktsfunktion erstellen, deren Graph dem Graphen der Kosinusfunktion cos ähnlich sieht. Diese Funktion heißt *welle6A*(*x*).

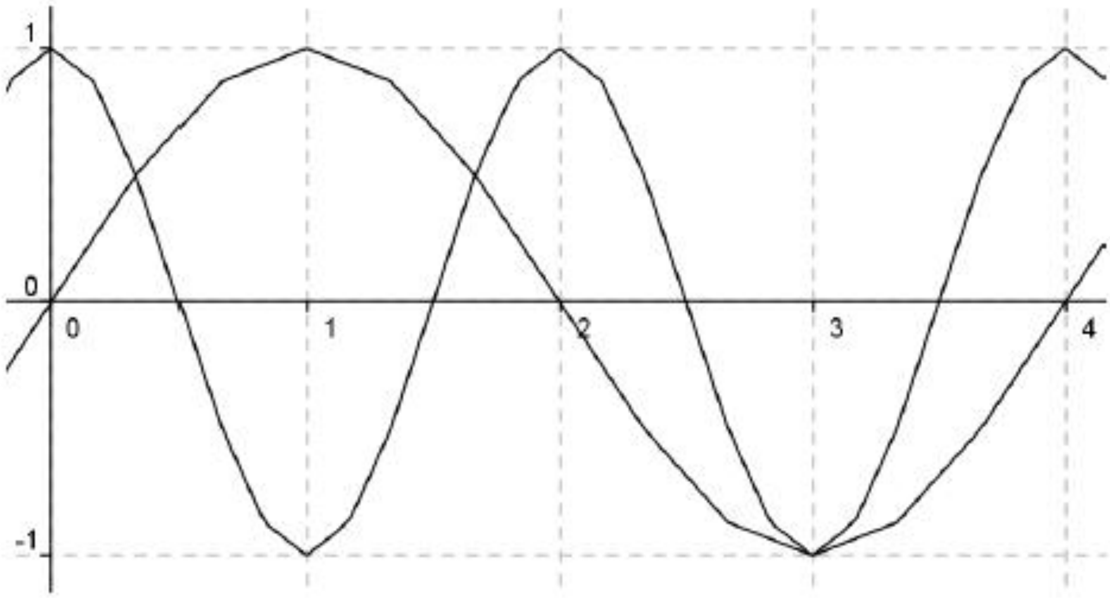
Diese Funktion hat Periode 4 und ist symmetrisch in $x = 0$ und in $x = 2$ und antisymmetrisch in $x = 1$ und in $x = 3$. Desweiteren sind (0, 1), (1/3; 0,87) en (2/3; 0,5) die drei Knickpunkte auf [0, 1).

D&Z-Aufgabe 11. Wellenfunktionen

- **a.** Gebt ein: $a = 1/3$.
- **b.** Erstellt die Funktionsvorschrift *welle6A*(x), so wie hier unten gezeigt, auf eine mögliche einfache Weise.



- ***c.*** Erzeugt auch *welle6B*(x) und *doppelwelle6*(x) aus *golf6A.*



Eigenproduktionsaufgabe 3. Bandornamente mit n-Punktsfunktionen

Kreiert zwei verschiedene ästhetisch ansprechende Bandornamente mit Periode 4 unter Benutzung der Werkzeuge aus den Teilen **B** und **C**.

Teil D: Geschwindigkeit, zwei Dimensionen, Animation

Hier werdet Ihr drei neue Elemente kennenlernen, die Euer kreatives Repertoire (auf dem zick-Zack Gebiet) beträchtlich erweitern werden. Mit einem einzigen Beispiel werden hier viele Möglichkeiten offenbar.
Ihr werdet Sie gerne in Teil E, der Abschlussaufgabe, zur Anwendung bringen.

Neues Element I: Geschwindigkeit
zick(*x)* bewegt sich auf dem Intervall [0, 4> genau einmal auf und nieder.
Betrachten wir nun die Funktion mit Vorschrift *zick*(3*x*), bei der x auch von 0 nach 4, dann durchläuft das 3*x* durch drei solche Perioden: von 0 bis 4, von 4 bis 8, von 8 bis 12. Drei mal auf und nieder über dem Intervall [0, 4>.
Anstelle der 3 kann man auch jeden anderen Geschwindigkeitsfaktor benutzen; und man kann die Geschwindigkeiten kombinieren. Ihr schon früher diese Geschwindigkeitsvariation eingesetzt. Hier gleich ein spannendes Beispiel.

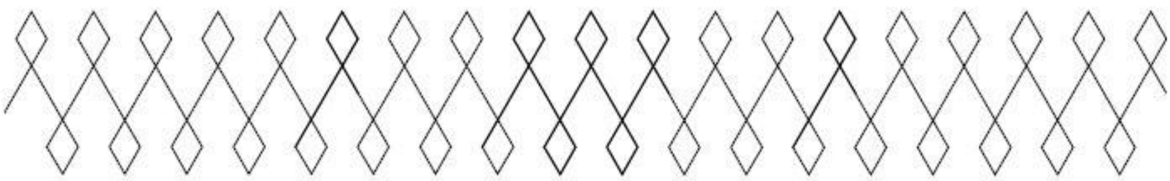
Neues Element II: Animation
Schon zuvor habt Ihr Schieberegler gemacht. Wenn Ihr rechts auf einen solchen Schieberegler klickt, dann seht Ihr die Option ‘Animation’. Geogebra lässt die gewählte Zahl dann selbstständig bewegen. Damit kann man schöne Sachen machen!

D&Z-Aufgabe 12. Geschwindigkeitsunterschiede, Auslöschen und Zunahme in der Animation

- **a.** Gebt die Funktion *zw*(*x*) = *zick*(*x*) + *zick* (1.1 *x*) ein. Vergrößert (Zoom), falls nötig, soweit, bis Ihr den Bereich von mindestens 0 - 100 seht. Weil dann der Graph zu flach wird, multipliziert Ihr das Ganze vertikal mit Faktor 5 oder 6.
- **b.** Erklärt die periodische Auslöschung und die Zunahme im Graphen. Was ist die total Periode?
- **c.** Es liegt nun nahe die Familie von Funktionen *zick*(*x*) + *zick*(*c x*) zu betrachten, wobei *c* in kleinen Schritten von 1 bis etwa 3 variiert. Macht dies und *animiert* das Ganze. Das sieht eindrucksvoll aus. Bei welchem Wert von c hat die Funktion eine Periode von 400?

Neues Element III: Die horizontale Bewegung in den Griff bekommen
Alle vorherigen (Band)ornamenten haben wir mit Hilfe von Funktionsgraphen erzeugt. Graphe auf dem Computer sehen so aus, als hätte ein bewegender Punkt eine Spur hinterlassen.
Der Punkt vollführt simultan zwei Bewegungen:
– eine gleichmäßige Bewegung in *x*-Richtung von Links nach Rechts.
– eine durch die Formel festgelegte (Auf- und Ab) Bewegung in *y*-Richtung.

Das folgende Bandornament jedoch werdet Ihr so nie erzeugen können:



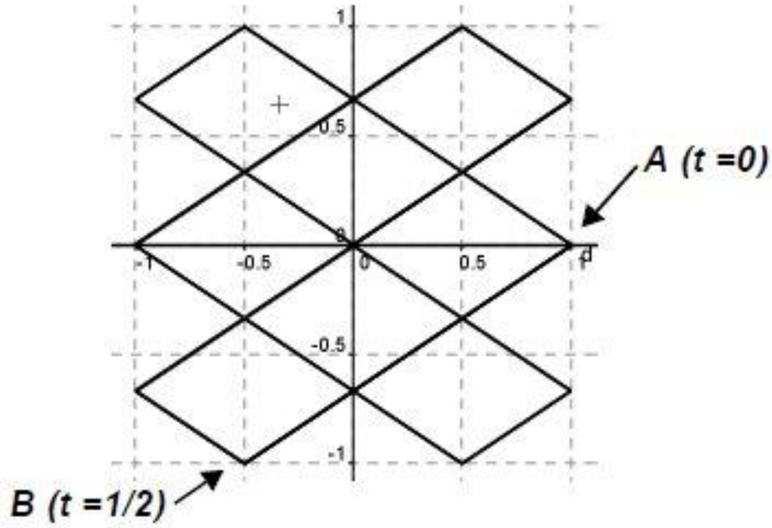
Um dies dann doch zu erzeugen, sollte Geogebra die Position des bewegenden Punkt auch in x-Richtung durch eine Formel bestimmen lassen, sodass sich die Koordinate ab und zu auch in Rückwärtsrichtung bewegt.

Die Angabe sowohl einer horizontalen Bewegung als auch einer vertikalen Bewegung, gelingt mit Hilfe des Befehls *Kurve* (oder *Curve* in der englischen Version von Geogebra).

Beispiel
Gebt Ihr bei Geogebra ein (achtet auf die eckigen Klammern!)

`Curve [zick(3t), zick(2t + 1), t, 0, 4]` (Englische Version)
`Kurve [zick(3t), zick(2t + 1), t, 0, 4]` (Deutsche Version)

Dann bekommt Ihr die folgende Figur zu sehen:



Stellt Euch unter *t* die Variable für die Zeit vor. Für alle Werte von *t* zwischen 0 und 4 zeichnet Geogebra dann die Punkte mit *x*-Koordinate *zick*(3*t*) und *y*-Koordinate *zick*(2t + 1). Falls Ihr dies mit der Hand nachmachen wollt, müsst Ihr alle Knickpunkte in einer Tabelle mit x-Koordinate *zick*(3*t*) und *y*-Koordinate *zick*(2t + 1) setzen:

t	*x*-Koordinate: *zick*(3*t*)	*y*-Koordinate: *zick*(2*t* + 1)	Buchstabe in der Abbildung
0	1	0	A
1/2	-1/2	-1	B
2/3	-1	-2/3	......
1	......	......	......
......	......	......	......
......	......	......	......

Was bedeutet das ‚t ‚ in der Kurvenaufgabe?
Geogebra ist auch in der Lage andere Variablen als *t* zu verstehen, jedoch müsst Ihr angeben, welche Variable laufen soll. Dies geschieht an der Stelle im Befehl nach den Formeln. Später werdet Ihr zusätzliche Parameter benutzen und dann wird es dem Programm nicht deutlich, wenn Ihr dies nicht explizit angebt.

D&Z-Aufgabe 13.

- **a.** Ergänzt die Tabelle; markiert auch die Punkte *C*, *D* etc. in der Abbildung.
- **b.** Wieviel Knickpunkte gibt es im Ganzen?

Die Beschreibung der Bahn eines Punktes mit Hilfe von Funktionen x(*t*) und *y*(*t*) wird *Parametrisierung* einer Kurve genannt.

Um Euch bewusst zu machen, welche Vielzahl an Möglichkeiten dies bietet, geben wir Euch hier eine Reihe von Vorschlägen, bevor Ihr dann mit der Abschlussaufgabe beginnt.

D&Z-Aufgabe 14. Möglichkeiten verkennen
Bei dieser Aufgabe greift Ihr zurück auf zuvor aufgestellte Funktionen. Klar!
Macht zunächst Schieberegler *p, q, r, s* (wählt selbst geeignete Bereiche für die Variablen), gebt dann die entsprechenden Terme ein und staunt, was Ihr alles machen könnt. Fixiert einige dieser Bilder.

- **a.** Kurve[*zick*(*p t*), *zack*(*q t* + *s*), *t*, 0, 20]
- **b.** Kurve[*t* + *r zick*(*p t), r zack*(*q t*)*, t,* 0, 20]
  (falls *r* nicht zu klein ist, läuft die x-Koordinate nun manchmal rückwärts!)
- **c.** Kurve[*t* + *r golf6A*(*p t*)*, r golf6B*(*q t*)*, t*, 0, 20]

D&Z-Aufgabe 15. Parametrisierungen von Kurven antiperiodischer Funktionen
Die in Teil 14b und c eingesetzten Funktionen für die *x*-Koordinate sind nicht antiperiodisch.

Falls Ihr Euch auf antiperiodische Funktionen für die x- und die y-Koordinate beschränkt, erhaltet Ihr Kurven mit eine speziellen Symmetrie

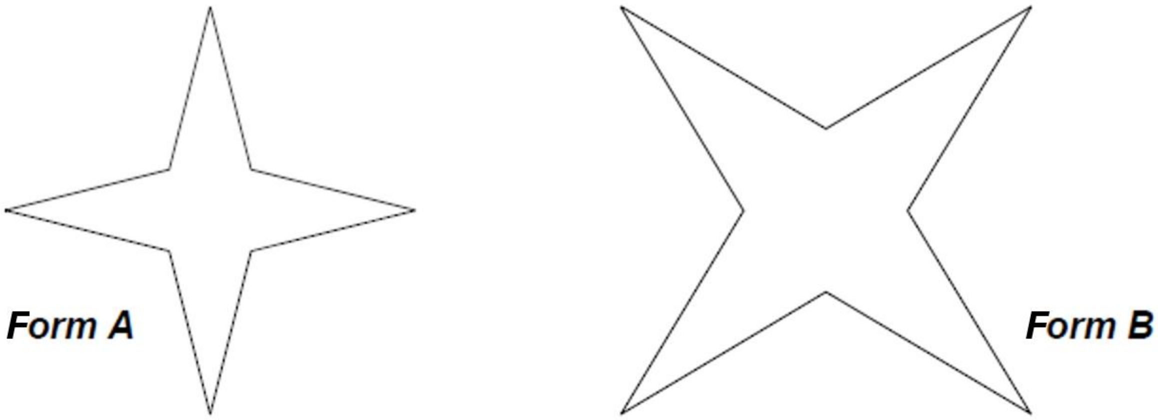
- **a.** Was ist diese Symmetrie?
- **b.** Beweist Eure Aussage!

Teil E: Drei Abschlussaufgaben

Als ***Abschlussaufgaben*** erzeugt Ihr einige vorgegebene und schließlich selbst erdachte (bewegliche) Figuren *mit Hilfe der Techniken aus dem Vorhergehenden*.

Abschlussaufgabe A

Erzeuge eine animierte Kurve deren Gestalt fortwährend zwischen der Form A und der Form B wechselt.



Abschlussaufgabe B

Aus der Theorie folgt, dass man mit einer n-Punktsfunktion und dem Befehl ‚Kurve' (oder ‚Curve') alleine durch den Gebrauch von zick-Funktionen sehr gut einen Buchstaben aus dem Alphabet im ersten Quadranten (wo beide Koordinaten positiv sind) zeichnen kann, der dann auch umgekehrt im 3. Quadranten (wo beide Koordinaten negativ sind) erscheint.

Erzeugt auf diese Weise den Buchstaben A und eventuelle weitere Buchstaben aus dem Alphabet.

Abschlussaufgabe C

Erzeugt ein statisches oder dynamisches Muster nach eigenem Entwurf mit Hilfe der vorhergehenden Techniken.

Genau wie bei den früheren kreativen Aufgaben, fügt Ihr Abbildungen mit Erklärungen in Eure Arbeit ein und ihr reicht die beweglichen (dynamischen) Erzeugnisse als .ggb File ein.