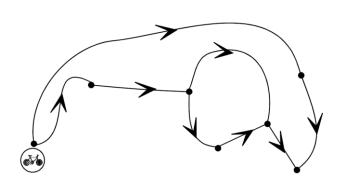
macht mathe internationale Mathematikwettbewerbe

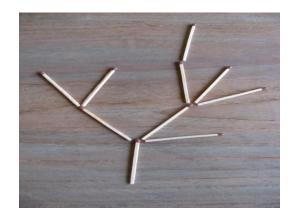




Der letzte Zug

macht mathe: B-Tag Freitag, 18. November 2011





Die Wettbewerbe MACHT MATHE werden vom Ministerium für Schule und Weiterbildung in Zusammenarbeit mit dem Freudenthal-Institut Utrecht mit freundlicher Unterstützung des Landesverbandes Mathematikwettbewerbe NRW und der Universität zu Köln ausgerichtet.

Vorab

Dieser B-Tag behandelt Spiele für zwei Personen. Es handelt sich hier um Spiele, in denen Zufall (z.B. weil es durch einem Würfel bestimmt wird, was ihr zu tun habt) keine Rolle spielt. Die Spielregeln sind sehr genau festgelegt. In jeder Spielsituation steht daher fest, welche Züge erlaubt sind. Die Spieler führen der Reihe nach einen Zug aus. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, verliert. Aber natürlich will jeder gewinnen. Darum versucht ihr einen Plan zu entwickeln, nach dem das möglich ist. Einen solchen Plan nennt man eine **Gewinnstrategie**.

Aufbau der Aufgabe

Teil 1

Wir stellen euch vier Spiele vor. Sie sollen euch helfen, euch in die Suche nach Gewinnstrategien einzuarbeiten. Ihr könnt natürlich bei vier Personen im Team die Spiele in zwei Zweiergruppen untersuchen. In diesem sorgt dafür, dass ihr die Ergebnisse austauscht und miteinander vergleicht! Im Text von **Teil 1** sind Aufgaben mit einem Punkt (•) versehen. Diese Aufgaben sollen euch den Einstieg erleichtern. Die sorgfältig ausgearbeiteten Ergebnisse hiervon erläutert ihr in eurer Ausarbeitung.

Teil 2

Hier wird eine Theorie vorgestellt, die ihr bei der Untersuchung diverser Spiele nutzen könnt. Die Theorie sollt ihr mit euren Ergebnissen und Überlegungen aus Teil 1 verknüpfen. Die in diesem Teil vorgestellte Technikheißt *Back-Tracking*. Vom letzten Spielzug auf die vorangegangen Züge zu schließen, kann auf der Suche nach einer möglichen Spielstrategie sehr hilfreich sein. Auch die Überlegungen aus diesem Teil beschreibt ihr in eurer Ausarbeitung.

Teil 3

Mit Hilfe einer Excel-Datei werdet ihr in diesem Teil mit einem der Spiele experimentieren. Der Computer übernimmt also lästige Aufgaben für euch und ihr erhaltet durch die Ausgabe der Excel-Datei Hilfen für eure Überlegungen. Auch die Überlegungen aus diesem Teil werden in eurer Ausarbeitung dokumentiert.

Abschlussaufgabe

Ihr sollt euch am Ende aussuchen, ob ihr weitere Analysen an den Spielen aus Teil 3 vornehmen wollt oder schwierigere Aufgaben zu einem der anderen Spiele aus Teil 1 oder Teil 2 bearbeiten wollt. Hier werdet ihr diverse Fragen und Vorschläge finden, die euch in eurer eigenen Untersuchung weiterbringen. Auch sie sind durch einen Punkt (•) hervorgehoben.

Das Endprodukt

Der Schlussbericht sollte für jemanden, der sich zuvor noch nicht mit der Problematik auseinandergesetzt hat, gut lesbar sein. Die Problemstellung und die Gegenstände eurer Untersuchung müssen also klar und ausführlich erläutert sein. Natürlich könnt ihr in eurer Ausarbeitung genau den sonderbaren Aufgabenstellungen aus dem Text nachgehen. Es ist aber auch gut – und vielleicht sogar besser – wenn eure Ausarbeitung von dem Gegenstand eurer Wahl im Abschlussauftrag ausgeht, eure Überlegungen hierzu genau erläutert und

MACHT MATHE: B-Tag 2011

begründet werden und dazu die Ergebnisse aus den Teilen 1, 2 und 3 hinzugezogen und von euch untersucht werden.

Liefert eine gut lesbare Ausarbeitung ab. Bei handschriftlichen Teilen verwendet einen schwarzen Stift, da dieser besser als Farbstifte kopiert wird.

Vorschläge für eine Zeiteinteilung von 8 bis 15 Uhr:

8 – 10 Uhr Teil 1: eigene Überlegungen anstellen, wie ein Spiel so geschickt wie möglich

gespielt werden kann.

10 – 11 Uhr Teil 2: macht euch mit Back-Tracking und der zugehörigen Notation vertraut

11 – 12 Uhr Teil 3: eigene Forschung mithilfe von Excel.

12 – 15 Uhr Abschlussaufgabe bearbeiten und Ausarbeitung anfertigen

Hinweis: Macht gelegentlich eine Pause, um auszuruhen und zu essen und zu trinken

Viel Spaß und Erfolg

Teil 1: 4 Spiele für 2 Personen

Wir stellen euch vier Spiele vor, die ihr zu zweit spielen sollt, um gemeinsam Gewinnstrategien herauszuarbeiten.

Spiel 1: Das (1, 2, 3)-Spiel

Material: Streichhölzer oder andere gleichartige Gegenstände

Vorbereitung: Legt eine Anzahl von Streichhölzern (z. B. 17) als Haufen auf den Tisch.

Regeln: Ein Zug besteht darin, 1, 2 oder 3 Streichhölzer zu entfernen.

Die Spieler ziehen der Reihe nach.

Wer mit dem Spiel beginnt, wird bei jedem Spielstart abgewechselt.

Gewinn/Verlustregel: Wer nicht mehr setzen kann, verliert.

Mit jedem Zug verschwindet mindestens ein Streichholz aus dem Haufen. Deshalb gibt es in dem Spiel immer einen Gewinner und einen Verlierer: Da mit jedem Zug weniger Streichhölzer auf dem Tisch liegen, kommt irgendwann der Moment, in dem kein zulässiger Zug mehr möglich ist.

 Spielt dieses Spiel einige Male. Wählt auch andere Startzahlen als 17. Spielt so lange, bis ihr herausgefunden habt, wie ihr den Gewinn sicher erreicht, wenn diese Möglichkeit gegeben ist...

Stellt auch Überlegungen zu Startzahlen an, bei denen der beginnende Spieler nicht gewinnen kann, so geschickt er auch spielt, wenn sein Gegner optimal spielt.

Sinn dieser Übung ist es, dass ihr das Spiel schließlich so weit durchschaut, um angeben zu können, bei welchen Startzahlen der beginnende Spieler gewinnen kann, so geschickt sein Gegner auch spielt. Bei den anderen Startzahlen gewinnt der zweite Spieler, auch wenn sein Gegner optimal spielt.

Eine Spielweise, die bestimmt, wie ihr das Spiel zu spielen habt, nennt man **STRATEGIE**.

MACHT MATHE: B-Tag 2011 Seite 3 von 14

Variante von Spiel 1: Das (3, 4)-Spiel

• Könnt ihr auch eine Gewinnstrategie angeben, wenn in Spiel 1 die Startzahl 65 ist und ein erlaubter Zug darin besteht, dass man 3 oder 4 Streichhölzer vom Haufen wegnimmt (statt 1, 2 oder 3)?

Spiel 2: Ein eingeschränkter König auf dem Schachbrett

Material: Schachbrett oder (besser) kariertes Papier und ein Spielstein (König)

Vorbereitung: Setzt den Königs auf ein Feld. Das ist das Startfeld des Spiels.

Regeln: Ein zulässiger Zug besteht darin, den König um ein Feld zu verschieben:

nach links, nach oben oder schräg um ein Feld nach links oben

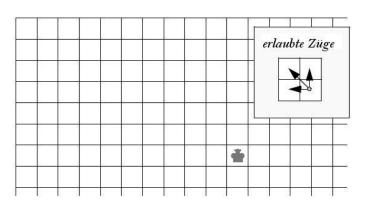
Die Spieler ziehen der Reihe nach.

Wer mit dem Spiel beginnt, wird bei jedem Spielstart abgewechselt.

Gewinn/Verlustregel: Wer nicht mehr setzen kann, verliert.

Der König ist in seiner Bewegungsrichtung beschränkt: Die Bewegung nach rechts oder nach unten ist nicht erlaubt. Schließlich wird der König in das Feld links oben gelangen und von dort aus ist kein weiterer Zug mehr möglich.

Ihr sollt genau herausfinden, bei welchen Startfeldern der beginnende Spieler gewinnen kann, auch wenn der Gegner optimal spielt. Bei den anderen



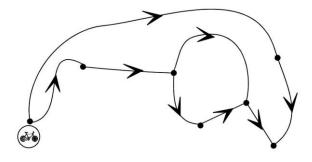
Startfeldern gewinnt der zweite Spieler, auch wenn der beginnende Spieler optimal spielt.

• Versucht die Startfelder, bei denen der beginnende Spieler gewinnt, wie auch die Startfelder, bei denen er verliert, herauszufinden.

Spiel 3: Das Einbahnstraßenspiel

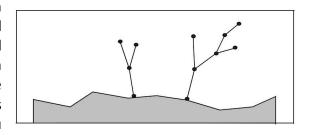
Bei diesem Spiel verschiebt ihr abwechselnd das Fahrrad um eine Etappe. Das Startfeld ist durch ein Fahrrad angegeben. Eine Etappe verläuft immer von einem Punkt zum nächsten. Achtet auf die Pfeile: Alle Wege sind Einbahnstraßen. Wer keinen Zug mehr ausführen kann, verliert.

• Kann der beginnende Spieler gewinnen?



Spiel 4: Das Baumschneide-Spiel

In diesem Spiel sollen Bäume beschnitten werden. Ein Baum besteht aus Zweigen und Knoten. Jeder Zweig verbindet zwei Knoten und hat dabei keinen Zwischenknoten. In einem Knoten können mehrere Zweige zusammenkommen. Die Abbildung zeigt das Beispiel eines Gartens mit zwei Bäumen. Zu



MACHT MATHE: B-Tag 2011 Seite 4 von 14

jedem Knoten gibt es genau einen Weg vom Boden in den Knoten.

Ein Zug besteht darin, einen Zweig direkt über dem Knoten, in dem er beginnt, wegzuschneiden. Ihr könnt beispielsweise auch den ganzen Baum in einem Zug wegschneiden, indem ihr den Zweig direkt oberhalb des Knotens am Boden, in dem der Baum beginnt, wegschneidet. Oder ihr könnt vom rechten Baum in diesem Garten den Teil, der vom zweiten Knoten an nach rechts verläuft, in einem Zug entfernen, indem ihr den Zweig direkt oberhalb des zweiten Knotens wegschneidet.

Material: Papier und Bleistift

Vorbereitung: Zeichnet einen Garten und eine Anzahl von Bäumen.

Regeln: Ein zulässiger Zug besteht darin, einen Zweig mit allem, was daran

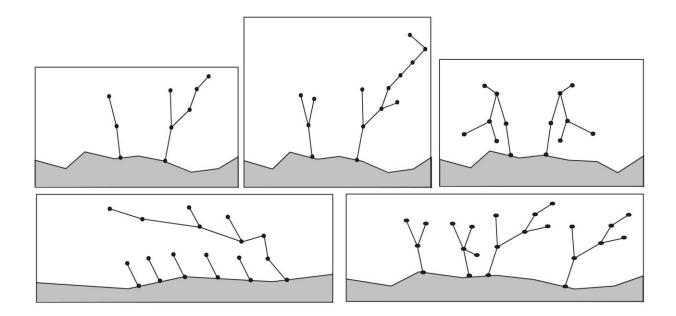
hängt, wegzuschneiden

Die Spieler ziehen der Reihe nach.

Wer mit dem Spiel beginnt, wird bei jedem Spielstart abgewechselt.

Gewinn/Verlustregel: Wer nicht mehr setzen kann, verliert.

• Spielt zu zweit das Baumschneidespiel in folgenden fünf Gärten:



Im fünften Garten (rechter Garten in der unteren Zeile) könnt ihr eine geschickte Strategie einsetzen! Wer beginnt, schneidet beim zweiten Baum von links einen der drei Zweige am zweiten Knoten vom Boden an gesehen ab.

Mit diesem ersten Zug kann der beginnende Spieler den Sieg erzwingen.

- Warum kann man das sicher behaupten? Mit welcher Strategie muss der beginnende Spieler vorgehen?
- Schwierig! (Überschlagen ist deshalb nicht schlimm): Bei einem anderen ersten Zug kann der zweite Spieler den Gewinn erzwingen. Stimmt das für jeden anderen ersten Zug?

Teil 2: Unparteiische Spiele; Theorie

A Gewinnen durch Back-Tracking mit 0 und 1

In diesem Teil wird eine Technik besprochen, die ihr wahrscheinlich schon im Teil 1 verwendet habt. Diese Technik wollen wir weiterentwickeln, allerdings brauchen wir vorher etwas Theorie.

Rückblick auf das (1, 2, 3)-Spiel

Wahrscheinlich habt ihr die Gewinnstrategie des (1, 2, 3)-Spiels entdeckt. Andernfalls lernt ihr sie nun! Mit jedem Zug, den ihr als beginnender Spieler ausführt, könnt ihr ein Vielfaches von 4 als Anzahl von Streichhölzern auf dem Tisch liegen lassen. Bei der Startzahl 17 nehmt ihr beispielsweise beim ersten Zug einen Streichholz und lasst 16 Streichhölzer liegen. Der zweite Spieler kann nun mit Sicherheit keinen Zug ausführen, bei dem eine durch 4 teilbare Zahl an Streichhölzern liegenbleibt. Aber ihr könnt durch euren nächsten Zug dieses Ziel erreichen: Der zweite Spieler nimmt nämlich 1, 2 oder 3 Streichhölzer und ihr könnt dann entsprechend 3, 2 oder einen Streichholz nehmen. Der zweite Spieler hat also nacheinander 16, 12, 8, 4 und 0 Streichhölzer vor sich liegen, wenn er an der Reihe ist.

- **1.** Wir spielen das (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)-Spiel und 1000 Streichhölzer liegen auf dem Tisch.
 - **a.** Welchen Zug **muss** der beginnende Spieler als erstes ausführen, damit er sicher den Sieg erzwingen kann?
 - **b.** Nach wie vielen Zügen endet das Spiel, wenn der beginnende Spieler mit einer sicheren Gewinnstrategie spielt?
 - **c.** Kann der beginnende Spieler auch gewinnen, wenn als Startzahl 374 gewählt wird? Nehmt dabei an, dass beide Spieler optimal spielen.

Rückwärts denken: Back-Tracking in Spiel 1

Wie kann man die Gewinnstrategie der durch 4 teilbaren Anzahlen in Spiel 1 entdecken? Wohl am ehesten auf folgende Weise: Wenn 0 Streichhölzer auf dem Tisch liegen, hat der Spieler, der an der Reihe ist, verloren. Wenn ihr gewinnen wollt, müsst ihr also dafür sorgen, dass ihr am Ende nicht 0 Streichhölzer vor der Nase liegen habt, sondern 1, 2 oder 3. Das bedeutet, dass derjenige, der bei 4 Streichhölzern an der Reihe ist, verliert. Denn dieser Spieler ist gezwungen, eine der Gewinnsituationen herzustellen und 3, 2 oder einen Streichholz liegen zu lassen. Wenn man also mit 5, 6 oder 7 Streichhölzern auf dem Haufen an der Reihe ist, kann man also den Gewinn erzwingen, weil man für den Gegenspieler die Verlierersituation von 4 Streichhölzern herstellen kann. Mit 8 Streichhölzern hat man dann also wieder eine Verlierersituation erreicht usw. Ihr durchdenkt das Spiel vom Ende aus rückwärts. Diese Lösungsstrategie nennt man BACK-TRACKING. Mit Hilfe des Back-Tracking können wir die Spiele aus Teil 1 und viele weitere Spiele gut analysieren.

Gewinner- und Verliererpositionen

In der Theorie über diese Art von Spielen spricht man von Spielpositionen oder *Positionen*. Positionen sind die Zustände, in denen sich das Spiel befindet. Im (1, 2, 3)-Spiel ist eine Spielposition die Anzahl der Streichhölzer, die sich in dem Haufen befinden. Beim Einbahnstraßenspiel ist es jeweils der Punkt, auf dem sich das Fahrrad gerade befindet. Ihr habt gesehen, dass die Zahlen 0, 4, 8, 12 und so weiter Verliererpositionen im (1, 2, 3)-Spiel sind. Wenn ihr in einer Verliererposition an der Reihe seid, könnt ihr nicht gewinnen,

sofern der Gegner keinen Fehler macht. Die Positionen 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, und so weiter sind

MACHT MATHE: B-Tag 2011 Seite 6 von 14

die Gewinnerpositionen. Wenn ihr als Spieler in diesen Positionen keinen Fehler macht, dann kann der Gegner nicht gewinnen.

Eine allgemeine Definition von Gewinner- und Verliererposition in Spielen nach dem Prinzip "wer keinen Zug mehr ausführen kann, verliert" lautet:

Gewinnerposition: Von dieser Position aus gibt es mindestens einen

erlaubten Zug, der auf eine Verliererposition führt.

• Verliererposition: Alle erlaubten Züge von dieser Position aus führen auf

eine Gewinnerposition.

Beachtet, dass ihr von einer Gewinnerposition manchmal auch durch einen erlaubten Zug zu einer Gewinnerposition gelangen könnt. Es gibt aber immer mindestens einen Zug, der auf eine Verliererposition führt. Wählt ihr dennoch einen Zug auf eine Gewinnerposition, so ist das äußerst ungeschickt, weil ihr damit die Regie über das weitere Spiel eurem Gegner überlasst.

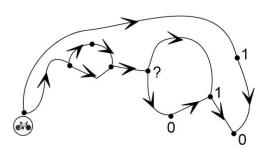
Positionen mit den Werten 0 und 1 bezeichnen

Ihr könnt die beiden Sorten von Positionen auf viele sinnvolle Arten und Weisen bezeichnen. In der Literatur sind die Werte **1** (für Gewinnerpositionen) und **0** (für Verliererpositionen) gebräuchlich.

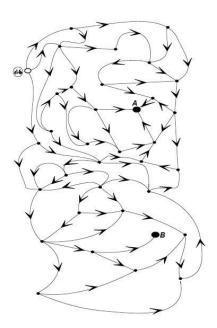
Wir betrachten als Beispiel für die Bezeichnung von Positionen mit den Werten 0 und 1 das Spielfeld aus dem Einbahnstraßenspiel mit dem Fahrrad.

Dabei geht ihr folgendermaßen vor:

- Wenn aus einer Position ein Pfeil auf eine Position mit dem Wert 0 führt, dann bezeichnet ihr die Position mit einer 1.
- Wenn von einer Position aus alle Pfeile auf Positionen mit einer 1 weisen, dann bezeichnet ihr diese Position mit einer 0. Von dieser Position aus gibt es keine Möglichkeit durch einen erlaubten Zug auf eine Gewinnerposition zu gelangen.
- 2. Kontrolliert an Hand der Fragen a., b. und c. sowie der nebenstehenden Abbildung, ob ihr das Vorgehen gut verstanden habt und anwenden könnt.
 - a. Überprüft, ob die Bezeichnungen mit 0 und 1 in der Abbildung richtig verwendet wurden. Der Wert der Position mit dem Fragezeichen ist 1,
 - denn ihr könnt durch einen erlaubten Zug den Gegenspieler vor eine Verliererposition stellen. Ihr könntet von dort aus auch die Position mit der 1 erreichen, aber das spielt hier keine Rolle...
 - **b.** Die Position, von der aus der Pfeil zum Fragezeichen führt, erhält den Wert 0. Aber, wenn ihr dort steht ...
 - **c.** Wer gewinnt das Spiel, wenn er optimal spielt: Der erste oder der zweite Spieler?
- **3.** Verwendet eure Kenntnisse über die Bezeichnung von Positionen mit 0 oder 1, um das folgende, komplexere Einbahnstraßenspiel z uuntersuchen. Die beiden möglichen Endpositionen werden mit A und B bezeichnet. Diese erhalten also den Wert 0. Das Spielfeld ist auf einer Anlage zu dieser Aufgabe noch größer abgebildet.



- a. Kann der beginnende Spieler gewinnen?
- b. Der Verlierer landet immer bei A oder B. Kann er dafür sorgen, dass es B ist?

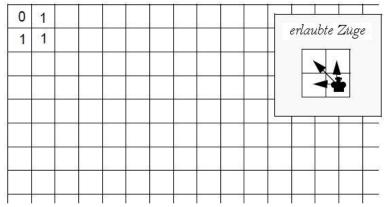


B Weitere Anwendungen mit 0 und 1: Die anderen Spiele

Der " eingeschränkte König " ist auch ein Pfeilspiel!

Setzen wir auf dem Schachbrett aus dem Spiel mit dem eingeschränkten König in die Mitte eines jeden Feldes einen Punkt, dann können wir mit Pfeilen die erlaubten Züge angeben, ähnlich wie beim Einbahnstraßenspiel. Das macht es zwar zunächst nicht übersichtlicher, aber jetzt wird ganz klar, wie die Bezeichnungen mit 0 und 1 in den einzelnen Feldern erfolgen müssen. Um besser über die Felder kommunizieren zu können nummerieren wir sie. Das Feld links oben nennen wir (0,0). Das sechste Feld (von links) in der dritten Reihe (von oben) wird mit (2,5) bezeichnet.

4. Hier ist bereits ein Stück des Spielfeldes mit Nullen und Einsen ausgefüllt. Auf dem Feld (0,0) endet das Spiel, es erhält also den Wert 0. Die drei Einsen stehen in den Feldern (0,1), (1,0) und (1,1), von wo aus ihr in einem erlaubten Zug nach (0,0) ziehen könnt. Das sind also Gewinnerpositionen.



Vom Feld (0,2) aus könnt ihr nur nach links ziehen, also auf ein Feld mit dem Wert 1.

- a. Warum müsst ihr dort also eine 0 notieren?
- **b.** Jetzt macht ihr weiter mit dem Feld (1,2). Warum muss hier eine 1 stehen?

c. Bezeichnet nun so lange weitere Felder mit 0 und 1, bis ihr ein System entdeckt. Erläutert das System.

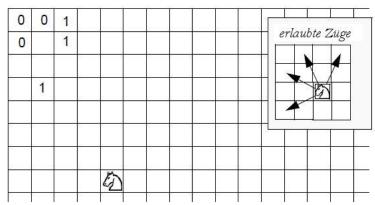
So viel zur Vorbereitung. Ihr seid nun am Zug mit dem eingeschränkten König auf dem Feld (6,10).

- **d.** Ist dies eine Gewinnerposition? Wenn ja, welcher Zug muss nun folgen?
- **e.** Setzt den König nun auf das Feld (1020, 389785). Ist dies eine Gewinnerposition? Wenn ja, welcher Zug muss nun folgen?

Das Spiel mit dem eingeschränkten Pferd

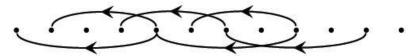
Dieses Spiel ist ähnlich wie das Spiel mit dem König, hat aber andere erlaubte Züge. Die erlaubten Züge sind der folgenden Abbildung zu entnehmen.

- 5. Ein paar Nullen und Einsen sind bereits im Spielfeld eingetragen
 - **a.** Führt die Bezeichnungen für weitere Felder fort und gebt an, ob der beginnende Spieler von der angegebenen Startposition bei optimalem Spiel gewinnen wird.
 - **b.** Beschreibt die Verliererpositionen mit Hilfe der Feldnummerierungen.



Das (3, 4)-Spiel ist auch ein Einbahnstraßenspiel

Vom (3, 4)-Spiel, der Variante von Spiel 1, ist hier ein Teil der Einbahnstraßenversion gezeichnet worden. Der Punkt ganz links steht für die Verliererposition 0. Insgesamt gibt es 66 Punkte, auch wenn sie nicht alle eingezeichnet worden sind. Wir gehen mit Hilfe des Back-Trackings vor und deshalb sind in der Zeichnung die letzten Züge des Spiels wiedergegeben. Einige erlaubte Züge sind durch Pfeile verdeutlicht worden.



- **6.** Die erlaubten Züge bestehen darin, 3 oder 4 Streichhölzer wegzunehmen. Einige erlaubte Züge sind hier durch Pfeile angegeben.
 - a. Fügt weitere Pfeile für erlaubte Züge hinzu.

Die Gewinner- und Verliererpositionen können durch die Werte 0 und 1 verdeutlicht werden. Die folgende Tabelle gibt diese Bezeichnungen für die letzten Spielpositionen wieder:

<u> </u>												
Anzahl der Streichhölzer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	 	
Werte (0 oder 1)	0	0	0	1	1						 	

b. In der Tabelle sind in der zweiten Zeile schon einige Nullen und Einsen eingetragen. Überprüft die Eintragungen und füllt die Tabelle nach rechts hin weiter aus.

- **c.** Gibt es ein Muster von Nullen und Einsen in der zweiten Tabellenzeile? Nach welcher Regel kann man es erzeugen?
- **d.** Wird das (3,4)-Spiel mit der Startzahl 65 vom beginnenden Spieler bei optimalem Spiel gewonnen?

Eine Figur mit Punkten und Verbindungslinien zwischen den Punkten bezeichnet man als **Graf**. Wenn die Verbindungslinien eine Richtung (durch einen Pfeil) haben, nennt man den Grafen **gerichtet**. Auf den gerichteten Grafen, die ihr bisher untersucht habt (Einbahnstraßenspiele) kommt ihr nie auf einen zuvor bereits besuchten Punkt erneut zurück. Es gibt auch Grafen, auf denen man auf zuvor besuchte Punkte wieder zurückkommen kann. In diesem Fall kann man im Kreis laufen. Einen solchen geschlossenen Pfad nennt man in der Grafentheorie einen **Zykel**. In unseren Spielen soll kein Zykel auftreten, damit ein endloses Spiel, bei dem man sich im Kreis bewegt, nicht vorkommt.

Teil 3: Wegnehmspiele: Experimentieren mit Excel

Das weißt du schon:

Bei Spiel 1 muss der Spieler, der an der Reihe ist, 1, 2 oder 3 Streichhölzer wegnehmen. Man beginnt mit einem Haufen von beispielsweise 25 Stück.

In der folgenden Tabelle seht ihr die Anzahl der restlichen Streichhölzer in der oberen Reihe und in der zweiten Reihe sind die zugehörigen Nullen (Verliererposition) und Einsen (Gewinnposition) angegeben. Die Reihe beginnt links mit dem Ende des Spiels: 0 Streichhölzer.

Anzahl der Streichhölzer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	 	 	
Werte (0 oder 1)	0	1	1	1	0	1	1	1	0	 	 	

Die Theorie der Gewinnroute

Die Menge {1, 2, 3} in dem Spiel heißt *pakset* des Spiels. Es ist die Menge der erlaubten Züge. Die Folge von Nullen und Einsen in der zweiten Zeile der Tabelle heißt die Gewinnroute. Wenn du eine einfache Beschreibung der Gewinnroute hast (wie hier), hast du eine gewinnende Strategie für den beginnenden Spieler, zumindest wenn die Startposition den Wert 1 hat.

Du machst nämlich immer 1, 2 oder 3 Schritte nach links auf der Gewinnroute. Das ist so, als ob du 1, 2 oder 3 Streichhölzer von dem Haufen wegnimmst.

Als zukünftiger Gewinner lässt du nach jedem Schritt eine Position mit dem Wert 0 auf der Gewinnroute für deinen Gegenspieler zurück. Du gelangst über einen geeigneten Zug also immer nach links auf der Gewinnroute zu der nächsten 0. Der Verlierer kann das nicht. Denn von einer 0 gibt es keinen erlaubten Zug zu einer nächsten 0.

Die Gewinnroute besteht in unserem Beispiel aus einem sich selbst immer wiederholenden Block: '0111'. Die Länge des sich wiederholenden Blocks ist 4. Darum nennen wir diese Gewinnroute *periodisch mit Periode 4*.

Natürlich untersucht ihr auch, was bei anderen Paksets passiert. Dazu gehören Fragen wie:

- Wie sieht die Gewinnroute aus?
- Gibt es eine Gewinnstrategie für den beginnenden Spieler?
- Warum tritt (manchmal) Periodizität auf?

7. Vorübung

Übt das Erstellen von Gewinnrouten bei den folgenden Paksets. Wenn eine periodische Reihe entsteht, notiert dann auch sofort die Periode.

a.	{1, 2, 3, 4}	mit Gewinnroute 0 1 1 1 1 0 1
b.	{1, 2}	mit Gewinnroute
c.	{1, 3}	mit Gewinnroute
d.	{1, 2, 4}	mit Gewinnroute
e.	{1, 3, 4}	mit Gewinnroute
f.	{2, 3, 4}	mit Gewinnroute
g.	{2, 4}	mit Gewinnroute
h.	{3, 6}	mit Gewinnroute

8. Eine Vermutung mit Beweis

- a. Die Paksets bei g und h bestehen aus dem 2- und 3-fachen des pakset bei b. Die Gewinnrouten von g und h hängen darum mit der Gewinnroute von b zusammen. Wie erstellt ihr aus der Gewinnroute von {1, 2} die von {4,8}?
- **b.** Wenn ihr euch noch nicht ganz sicher seid, dass eure Antwort allgemein stimmt, probiert es mit einem anderen Pakset und dem Vielfachen davon noch einmal. Untersucht z. B. **e** und das dazu doppelte Pakset {2, 6, 8}.
- **c.** Es ist möglich auch noch mehr Paare von Paksets zu untersuchen. Wenn ihr euch sicher seid, welcher Zusammenhang besteht, müsst ihr eine Erklärung geben können, warum der Zusammenhang allgemein gilt. So eine Erklärung ist ein Beweis für den Zusammenhang, den ihr gefunden habt.

9. Blöcke mit Nullen und Einsen in der Gewinnroute.

- **a.** Bei dem Pakset {1, 2, 3} kommen höchstens 3 Einsen in der Gewinnroute hintereinander und höchstens eine 0. Die Zahlen 3 und 1 sind genau die kleinste und die größte Zahl aus dem Pakset. Lässt sich die Behauptung verallgemeinern?
- **b.** Ist das wahr? Wenn die Länge des längsten Blocks mit Einsen in der Gewinnroute gleich der größten Zahl im Pakset ist, dann ist das Pakset die Menge der Zahlen von 1 bis zu der größten Zahl.

Andere Vermutungen über Gewinnrouten

Untersuchung mit dem Computer: das Programm PakWeg

Da das Bestimmen einer Gewinnroute immer dieselbe Arbeit ist, könnt ihr das ab jetzt mit dem Computer machen. Öffnet die Exceldatei "PakWeg".

Beim Öffnen seht ihr die Gewinner- und Verliererpositionen des Paksets {1, 4}. Ihr bekommt auch Informationen über die Periode und darüber, in welcher Position die Periode beginnt.

Schreibt ihr noch andere Zahlen in das Pakset (maximal 7 Zahlen), so generiert das Programm selbst die zugehörige Gewinnroute und Informationen über die Periode und die Startposition der Periode.

Eine kurze Anleitung für den Gebrauch von PakWeg ist separat als Anlage beigelegt.

In diesem Teil geht es darum, dass ihr selbst Vermutungen anstellt und diese untersucht. Hier bekommt ihr nur Anregungen. Was ihr untersucht, welche Beispiele ihr aussucht und welche Überlegungen ihr dazu anstellt, das entscheidet ihr ab jetzt selbst ...

Darum sind die Anregungen nicht nummeriert, als ob es Fragen sind, die ihr beantworten sollt, sondern sie werden nur mit einem Punkt markiert.

Periodizität

Bei den Beispielen mit kurzen Paksets von kleineren Zahlen habt ihr bestimmt bemerkt, dass in der Gewinnroute immer derselbe Block wiederholt wird. Die Länge eines solchen Blocks nennen wir die **Periode der Gewinnroute**.

Eine geschlossene Argumentation, warum dies so ist, wird geht in die Bewertung eurer Arbeit ein!

- Bestimmt für alle Werte von n (n = 2, 3, 4, 5, ...) die Periode des Paksets {1, n}. Formuliert eine Behauptung: "Die Periode der Gewinnroute zum Pakset {1, n} ist ...".
- Führt dies auch für Paksets der Form {2, n} durch.
- Bei den zwei Paksets {1, 3, 6} und {1, 2, 3, 8} findet ihr in der Gewinnroute Perioden der Länge 9. Aber der Block mit Nullen und Einsen, der wiederholt wird, ist nicht derselbe. Findet ihr noch mehr solcher Beispiele?

Abschlussaufgabe: Wegnehmspiele auf dem Schachbrett

Ihr habt die Wahl: wollt ihr weiter Wegnehmspiele mit der Exceldatei "PakWeg" analysieren, oder wollt ihr lieber ein paar schwierigere Varianten des beschränkten Königs auf dem Schachbrett untersuchen? Trefft eure Wahl und zeigt, was ihr könnt!

Schlussauftrag 1 Wegnehmspiele: Argumentieren über Periodizität

Hier vertieft ihr euch weiter in die Periodizität von Gewinnrouten bei Wegnehmspielen. Wir geben einige Anregungen für Untersuchungsfragen die ihr euch selbst stellen könnt. Natürlich könnt ihr auch noch andere, eigene Vermutungen formulieren und untersuchen.

 Alle Gewinnrouten, die ihr bis jetzt gesehen habt, waren periodisch. Eine erste Untersuchungsfrage könnte sein, ob dies allgemein gilt. Wir verraten direkt die Antwort auf diese Frage:

Für jedes Pakset ist die Gewinnroute tatsächlich periodisch (wie zum Beispiel bei $0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,0\,1\,1$), möglicherweise ein Stückchen nach dem Anfang. Versucht, einen allgemeinen Beweis hierfür zu finden.

Es folgt ein Tipp für den Beweis, dass immer eine Periodizität in den Gewinnrouten auftritt. Beim Pakset {5, 13, 18} fand ein Computer als Anfang der Gewinnroute:

So einfach seht ihr die Periode hier nicht. Sie existiert aber.

In den ersten 145 + 18 Positionen folgt das Anfangsstück von 18 Ziffern noch einmal nach Position 145 (beide sind im Folgenden fettgeschrieben).

MACHT MATHE: B-Tag 2011 Seite 12 von 14

Könnt ihr euch jetzt sicher sein, dass eine Periode mit der Länge 145 existiert? Gebt eine gute Argumentation!

- Bestimmt die Länge der Periode beim Pakset {m, n} für zwei natürliche Zahlen m und n. Danach könnt ihr versuchen herauszufinden, wovon Periodenlänge eines Paksets mit mehr als zwei Zahlen abhängt.
 - Tipp: Es ist eine gute Idee, sich zunächst auf einen bestimmten Typ Paksets zu beschränken, zum Beispiel ein Pakset der Sorte {1, 2, andere Zahl)
- Beginnt die Periodizität eines gegebenen Paksets immer sofort mit dem Beginn der Gewinnroute? Ist dies zum Beispiel wahr: "Bei Paksets der Sorte {m, n} startet die Periodizität immer sofort zu Beginn der Gewinnroute"? Betrachtet auch Paksets mit mehr als zwei Zahlen, zum Beispiel {5, 11, 17} und {5, 13, 17}.
- Betrachtet die periodische Folge mit Periode sechs: 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 0 1 0 1 1 1 ...
 Kann man ein Pakset finden, von dem dies die Gewinnroute ist?
 Dieselbe Frage untersucht für die periodische Folge mit Periode sieben: 0 1 0 1 1 1 1 0 1 0 1 ...
 - Könnt ihr allgemeine Regeln formulieren (und beweisen), wann eine periodische Folge, die mit einer 0 beginnt, als Gewinnroute eines Paksets auftritt?

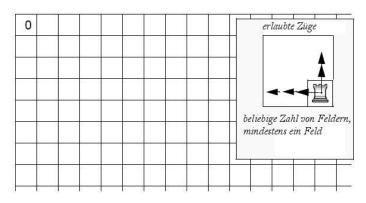
Schlussauftrag 2 Andere Schachbrettspiele

Ihr habt auf kariertem Papier mit dem eingeschränken König und dem eingeschränkten Pferd gespielt. Es folgen noch zwei ähnliche Spiele. Die Besonderheit ist, dass die Schachfigur, mit der ihr spielt, nicht nur eingeschränkte Sprünge machen darf, sondern auch so weit, wie ihr möchtet. In beiden Fällen müsst ihr die Verteilung der Nullen und Einsen auf den Feldern kennen, um optimal spielen zu können. Bei diesen Spielen ist es schwierig, diese Verteilung herauszufinden. Eine echte Herausforderung ist es, die Verliererpositionen anzugeben, aber ihr könnt euer Ziel auch weiter einschränken.

Das Spiel mit dem Nord-West Turm

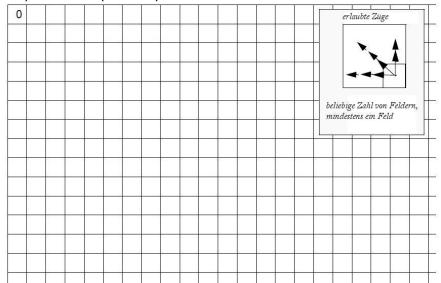
Der Turm kann um eine beliebige Anzahl (>0) von Feldern verschoben werden, es muss aber nach oben (Norden) oder nach links (Westen) geschehen.

- Bestimme die Gewinner- und Verliererpositionen auf dem gesamten Feld.
- Gibt es immer eine Gewinnstrategie für den beginnenden Spieler?



Das Spiel mit der Nord-Nordwest-West Dame

Die Dame darf um beliebig viele Felder nach oben (Norden), diagonal nach links oben (Nordwesten) oder links (Westen) verschoben werden.



- Setzt für den Anfang Einsen auf die Felder, von denen aus man in einem Zug zur 0 gelangt.
- Jetzt könnt ihr wieder einige Verliererpositionen angeben.
- Findet heraus wie ihr weiter back-tracken könnt.
- Spielt das Spiel mit der Dame im Startfeld (20, 40)
- Bestimmt wieder die Gewinner- und Verliererpositionen des gesamten Spielfeldes.
- Vielleicht findet ihr eine charakteristische Beschreibung der Verliererfelder. Das wäre sehr schön!
- Es ist auch schön, wenn ihr herausfindet, welche der folgenden Startfelder Gewinnerpositionen sind: (15, 31); (20, 21); (100, 200).
- Je mehr ihr über das Muster der Verliererpositionen aussagen könnt, desto besser!