Mathematik B-Tag 2014

Freitag, 21. November, 8:00 – 15:00 Uhr

Lights Out

Der Mathematik B-Tag wird gesponsort von:

Zum Aufwärmen: Spiele das Spiel!

Der heutige Tag befasst sich mit dem Spiel ‘Lights Out', welches seit 1995 weltweit gespielt wird. Das Spiel besteht aus einem Spielfeld mit 25 Lampen innerhalb eines Rasters mit fünf Reihen und fünf Spalten. In der Startkonfiguration sind einige Lampen angeschaltet. Das Ziel von Lights Out besteht darin – wie der Name schon sagt – alle Lampen auszuschalten. Die Lampen können angeklickt werden (eigentlich sind es Knöpfe mit einer Lampe darin). Wenn man eine Lampe anklickt, schaltet man damit die Lampe um, das heißt die Lampe geht aus, falls sie zuvor an war, und umgekehrt. Zusätzlich – und das ist wichtig – werden auch die unmittelbaren Nachbarn (links, rechts, oben und unten) der angeklickten Lampe umgeschaltet.

Du wirst feststellen, dass es im Zusammenhang mit Lights Out eine Menge mathematischer Rätsel gibt. Dabei wirst du auch Varianten des Spiels mit anderen Abmessungen als 5x5 untersuchen.

Hier gibt es zum Aufwärmen als erstes ein paar Rätsel im Originalspiel. Öffne dazu die App auf http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/LightsoutDE/Lightsout.html und nimm dir ein wenig Zeit, die Möglichkeiten der App kennenzulernen.

Rätsel 1 (einfach)

Erstelle in der App ein 5×5-Spielfeld und verwende die Möglichkeiten unter ‘Konfiguration erstellen’, um die rechts abgebildete Startkonfiguration zu erhalten. Wähle dann ‘Klicks direkt ausführen’ und löse das Rätsel, das heißt schalte alle Lampen aus. Eine 0 bedeutet dabei ‘aus’ und eine 1 bedeutet ‘an’. Dieses Rätsel kann mit fünf Klicks gelöst werden.

1	1	0	1	1
1	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	1	1

Rätsel 2 (*mittel*)

Löse das nebenstehende Rätsel. Dies ist mit sechs Klicks möglich.

1	0	1	0	1
1	0	1	0	1
0	0	0	0	0
1	0	1	0	1
1	0	1	0	1

Rätsel 3 (*schwierig*)

Ist dieses Rätsel zu schwierig für den Moment? Kein Problem! Vielleicht denkst du sogar nach langem, fruchtlosen Klicken, dass es gar nicht möglich ist. Dann hast du in diesem Fall unrecht.
Aber wie du vielleicht schon weißt, sind von den 33.554.432 möglichen Startkonfigurationen nur 25% lösbar. Lösbar bedeutet, dass es eine Möglichkeit gibt, alle Lampen auszuschalten. Nicht-lösbar bedeutet, dass dies nicht möglich ist –was auch immer man probiert.

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

Später am Tag lernst du Techniken, mit deren Hilfe du für ein gegebenes Rätsel bestimmen kannst, ob es lösbar ist und wie du in solchen Fällen eine Lösung finden kannst.

Allgemeines

Bei diesem Mathematik B-Tag kannst du mit einer App spielen. Die Onlineversion findet sich unter http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/LightsoutDE/Lightsout.html. Eine Offlineversion (nur für Windowsrechner) hat dein Lehrer zur Verfügung.

Im Internet finden sich einige Informationen zu dem Spiel Lights Out. Diese sind aber häufig eher verwirrend als hilfreich für die Probleme, an denen du heute arbeiten wirst. Du darfst das Internet frei verwenden. Aber achte darauf, dort keine Zeit zu verschwenden!

Struktur der Aufgaben

Im *Teil EINS* (Basisteil) wirst du Lights Out erkunden. Dabei wirst du selbst viel ausprobieren. Es gibt einige Aufgaben, bei denen du etwas zeichnen oder notieren musst. Die Aufgaben in diesem Teil sind nummeriert. Dadurch kannst du später (beispielsweise im zweiten Teil) auf deine früheren Ergebnisse verweisen; etwa so: „Bei Aufgabe 13 haben wir gesehen, dass ... . Das verwenden wir jetzt weiter.“

Die einführenden Fragen, [Erkundung] genannt, wurden entworfen, um dich in das Thema einzuführen, und diese Fragen werden nicht in deine Abschlussarbeit aufgenommen. Für die übrigen Fragen, [Aufgabe] genannt, sollst du deine Antwort mit einer mathematischen Begründung in deine Abschlussarbeit aufnehmen.

Achtung! Der letzte Abschnitt des ersten Teils ist ziemlich schwierig und eher theoretischer Natur. Bearbeite diesen Abschnitt nur, falls du noch genügend Zeit am Vormittag hast. Dieser Teil ist vor allem dann wichtig, wenn du Hauptaufgabe D im zweiten Teil bearbeiten möchtest.

Im *Teil ZWEI* (eigene Forschung) arbeitest du selbständig an komplizierteren und eher offen formulierten Problemen. Dabei kannst du deine Erkenntnisse aus dem ersten Teil gut gebrauchen. Bearbeite nach Möglichkeit die Hauptaufgaben A, B und C und nimm die Antworten auch in deine Abschlussarbeit auf. Hauptaufgabe D ist eine Zusatzaufgabe für diejenigen, die noch etwas mehr machen wollen.

Beachte dabei, dass im zweiten Teil eine tief gehende Beantwortung zweier Hauptaufgaben mehr geschätzt wird als eine oberflächliche Antwort auf drei oder alle vier Hauptaufgaben.

Was erwarten wir von dir?

In deiner Abschlussarbeit sollst du deine Resultate zu den Aufgaben im ersten und zu den Hauptaufgaben im zweiten Teil beschreiben.

Nutze deine eigenen Worte, so dass sie deutlich und überzeugend sind, und verwende erklärende Zeichnungen, wo es für das bessere Verständnis angebracht ist. Deine Schlussarbeit soll für diejenigen verständlich sein, die nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen haben, aber über genügend mathematische Kenntnisse verfügen. Das heißt insbesondere, dass du verständlich in das Thema einführen musst und dass du, wenn nötig, auf das zurückgreifen musst, was du im Basisteil gelernt hast.

Kurzum: Schreibe einen eigenen und klaren Bericht, den du mit mathematischen Argumenten belegst. Auch die Darstellung wird bei der Bewertung berücksichtigt!

Tagesablauf

Teil EINS ist im Wesentlichen für den Vormittag bestimmt. Überlegt gemeinsam, wie ihr diesen Teil realisieren wollt. Für die Schlussarbeit kann es sinnvoll sein, schon während des Vormittags, das ein oder andere in ein digitales Dokument zu übertragen.
Beachte auch, dass die gesamte Schlussarbeit um 15:00 Uhr eingereicht werden muss!

Viel Erfolg und noch mehr Spaß bei dieser mathematischen Herausforderung!!

Teil EINS (Basisteil)

Die Position einer Lampe auf dem Spielfeld geben wir mit (*Zeile*, *Spalte*) an. Ein Klick auf Lampe (i, j) wird geschrieben als $K_{i,j}$. Falls es nur eine Zeile gibt, schreiben wir einen Klick auf Lampe (1, j) auch als K_j. Eine *Klickserie* besteht aus mehreren hintereinander ausgeführten Klicks, beispielsweise $K_{1,3}$ $K_{4,2}$ $K_{3,3}$. Als *Nullkonfiguration* bezeichnen wir die Konfiguration des Spielfeldes, bei welcher alle Lampen ausgeschaltet (0) sind.

A: Klickserien

1. [Erkundung]

Erstelle diese Konfiguration auf einem 4×7-Spielfeld mit Hilfe von 'Spielfeld erstellen' und 'Konfiguration erstellen':

1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Nutze die Option ‘Plan erstellen’ und klicke die in der folgenden Darstellung unterstrichenen Lampen an. Durch das Unterstreichen wird auch in der App angezeigt, welche Lampen angeklickt wurden.

1	1	0	$\underline{0}$	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{0}$	$\underline{0}$	0	$\underline{1}$	1	0
0	$\underline{1}$	0	1	1	0	0
0	0	0	0	0	1	0

Kannst du dir erklären, bevor du auf den Knopf ‘Plan ausführen’ klickst, dass durch das Ausführen des Plans Lampe (1, 5) umgeschaltet wird, Lampe (2, 3) aber nicht?

a) Erkläre, wie das mit der Anzahl der angeklickten Nachbarn zusammenhängt.

b) Stelle dir vor: Auf einem 1×99-Spielfeld sind alle Lampen angeschaltet. Dann führst du die Klickserie K_1 K_2 K_{50} K_{92} K_{94} aus. Welche Lampen sind nun aus?

2. [Erkundung]

Erstelle eine beliebige Konfiguration auf einem 1×6-Spielfeld (z.B. mit der Option ‘Lampen zufällig an/aus’) und schreibe diese Startkonfiguration auf.

a) Führe die Klickserie K_1 K_3 K_4 K_5 K_3 K_5 aus und notiere das Resultat.

b) Setze das Spielfeld auf die Startkonfiguration zurück, führe nun die Klickserie K_1 K_4 aus und notiere wieder das Resultat.

c) Die Endkonfigurationen in Frage a) und b) erweisen sich als identisch. Warum muss das so sein?

3. [Erkundung]

Erstelle eine beliebige Startkonfiguration und wähle drei unterschiedliche Klicks aus, die wir *A, B und C* nennen. Probiere aus, ob die Klickserie *A B C* den gleichen Effekt hat wie *B A C* und wie *C A B*. Erkläre, warum das so sein muss.

Zusammenfassung • Doppelte Klicks können aus einer Klickserie entfernt werden. Nur wenn ein Klick in einer ungeraden Anzahl vorkommt, hat er einen Effekt. • Die Reihenfolge von Klicks in einer Klickserie ist unerheblich.

Aus dieser Erkenntnis ergibt sich eine wichtige Folgerung, die im Laufe dieses Tages fortwährend von Bedeutung sein wird:

Folgerung 1: Man kann jederzeit zu einer früheren Konfiguration zurückkehren.

4. [Erkundung]

Wenn man zwei Mal hintereinander in einer Reihe jedes einzelne Licht anklickt, führt man jeden Klick doppelt aus. Was hat sich danach geändert, in einem Wort zusammengefasst?

5. [Erkundung]

Wenn man ausgehend von einer Startkonfiguration eine Klickserie ausführt, welche zur Nullkonfiguration führt, und wenn man von dort diese Klickserie erneut ausführt, wie lautet dann die Endkonfiguration?

Folgerung 2: Es sind genau diejenigen Konfigurationen auflösbar, welche man durch Klicken von der Nullkonfiguration aus erreichen kann.

6. [Erkundung]

Erkläre, warum Folgerung 2 gilt.

7. [Erkundung]

a) Erstelle mit der App ein 3x4-Spielfeld. Drücke ‘alle Lampen an’. Verwende dann die Option ‘Plan erstellen’ und klicke alle Lampen am Rand des Spielfelds an, auch in den Ecken. Drücke noch nicht ‘Plan ausführen’. Überlege dir, wie das Ergebnis der Klickserie aussehen wird.

b) Drücke nun ‘Plan ausführen’. Stimmt das Resultat mit deiner Überlegung überein?

c) Was ergibt sich, wenn man nochmals alle Lampen am Rand anklickt?

d) Untersuche auf die gleiche Weise auch, was sich ergibt, wenn man auf einem $n \times n$-Spielfeld alle Lampen auf der Diagonale ((1,1), (2, 2), (3, 3) bis einschließlich (n, n)) anklickt.

e) Schalte zuerst alle Lampen mit dem dazugehörigen Knopf aus. Klicke nun auf jede Lampe einmal. Stelle dir das Ergebnis auf einem $m \times n$-Spielfeld für beliebige Werte von m und n vor.

8. [Aufgabe A]

Wir untersuchen nun ein $1 \times n$-Spielfeld (für n = 1, 2, 3, 4, …), wobei in der Startkonfiguration alle Lampen angeschaltet sind.

Behauptung: Für jeden Wert von n gibt es eine Klickserie, mit der die Nullkonfiguration erreicht wird.

a) Zeige, dass diese Behauptung wahr ist.

b) Für jeden Wert von n gibt es auch eine kürzeste Klickserie, mit der die Nullkonfiguration erreicht wird. Untersuche welcher Zusammenhang zwischen der Länge der kürzesten Klickserie und n besteht.

B: Nullen, Einsen und Schaltschemata

Bei einem Klick auf eine Lampe werden diese Lampe und auch die direkten Nachbarlampen umgeschaltet. Dadurch verändert sich die Konfiguration des Spielfelds.

Hier ein Beispiel auf einem 4×5-Spielfeld. Den Klick $K_{3,3}$ kann man wie folgt darstellen:

Start-konfiguration

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

\+

Klick $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

=

Endkonfiguration

1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	0	0	0
0	1	0	0	1

Die 1-sen auf dem Spielfeld der Start- und Endkonfiguration stehen für eingeschaltete Lampen. Die 1-sen beim Klick $K_{3,3}$ stellen wir uns etwas anders vor, nämlich so dass diese fünf Lampen durch den Klick umgeschaltet werden (von 'an' zu 'aus' und umgekehrt). Die 0-en zeigen an, dass an dieser Stelle nicht umgeschaltet wird.

Das unterhalb von $K_{3,3}$ dargestellte 4×5-Raster nennen wir Schaltschema von $K_{3,3}$.

Das '+' und '=' in der Darstellung geben an, dass man die Endkonfiguration 'berechnen' kann. Dabei muss man die folgenden 'Rechenregeln' in jeder Zelle anwenden:

0 + 0 = 0   Eine Lampe, die ausgeschaltet ist und nicht umgeschaltet wird, bleibt aus,
1 + 0 = 1   eine Lampe, die angeschaltet ist und nicht umgeschaltet wird, bleibt an,
0 + 1 = 1   eine Lampe, die ausgeschaltet ist und umgeschaltet wird, geht an und
1 + 1 = 0   eine Lampe, die angeschaltet ist und umgeschaltet wird, geht aus.

Zwei nacheinander ausgeführte Klicks (erst $K_{3,3}$ und dann $K_{2,4}$) kann man wie folgt darstellen:

Start-konfiguration

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

\+

Klick $K_{3,3}$

0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	1	0	0

\+

Klick $K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

=

Endkonfiguration

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Man kann aber auch zuerst den Effekt der beiden Klicks zusammenrechnen und so den Effekt der Klickserie ($K_{3,3}$ $K_{2,4}$) bestimmen:

Start-konfiguration

1	1	0	1	0
1	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1

\+

$K_{3,3} + K_{2,4}$

0	0	0	1	0
0	0	0	1	1
0	1	1	0	0
0	0	1	0	0

=

Endkonfiguration

1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
0	1	0	0	1

Das unter $K_{3,3} + K_{2,4}$ dargestellte Raster ist dann das Schaltschema der Klickserie.

Beachte den Unterschied zwischen Klickserie und Schaltschema!!

Zusammenfassung

- Eine Klickserie gibt an, auf welche Lampen geklickt wird.
- Das Schaltschema einer Klickserie gibt an, welche Lampen letztendlich durch die Klickserie umgeschaltet werden.

9. [Erkundung]

Wähle ein beliebiges Spielbrett (z.B. 7x4) und wähle eine beliebige Klickserie mit drei Klicks. Das Schaltschema dieser Klickserie findest du wie folgt: Schalte alle Lampen aus und führe dann die Klickserie aus. Fertig!

Lege dar, warum du nun das Schaltschema der Klickserie auf dem Bildschirm siehst.

10. [Erkundung]

Wie sieht auf einem 7×7-Spielfeld das Schaltschema der Klickserie aus, bei welcher die Lampen wie in der britischen Flagge angeklickt werden, also alle Lampen auf den zwei Diagonalen und in der vierten Zeile und der vierten Spalte?

11. [Erkundung]

Auf einem gegebenen Spielfeld gibt es nur eine begrenzte Anzahl echt verschiedener Klickserien. *Echt verschieden* bedeutet: Jede Lampe wird nur einmal angeklickt und die Reihenfolge spielt keine Rolle.

a) Wie viele echt verschiedene Klickserien gibt es auf einem 1x4-Spielfeld?

b) Wie viele echt verschiedene Klickserien gibt es auf einem 2x2-Spielfeld?

c) Suche Klickserien zu den folgenden vier Schaltschemata (auf 1x4 und 2x2):

1	0	0	1

0	1	0	0

0	0
0	1

1	0
0	1

Hinweis!

Wenn wir zukünftig von Klickserien sprechen, dann meinen wir immer Klickserien, bei denen die Klicks sortiert sind und bei denen kein Klick doppelt vorkommt. Wenn wir die Menge aller Klickserien betrachten, dann sind in dieser Menge also nur noch echt verschiedenen Klickserien.

12. [Aufgabe B]

Stelle dir ein 1x5-Spielfeld vor. Denken und Argumentieren reichen bei dieser Aufgabe aus; die App hilft dir hier nicht wirklich weiter.

In Frage 8 hast du herausgefunden, dass du auf dem 1x5-Spielfeld von der Nullkonfiguration aus mit zwei Klicks alle Lampen anschalten kannst – und natürlich auch wieder aus. K_1K_4 war eine solche Klickserie: K_1 schaltet zwei Lampen um und K_4 die restlichen drei. Das Schaltschema besteht auf fünf 1-sen.

Aber das geht auch anders...

a) Das Schaltschema der Klickserien K_1 K_4 und K_2 K_5 sind identisch. Vollziehe das nach.

Wir sagen: K_1 K_4 und K_2 K_5 sind *effektgleiche Klickserien*. Das ist natürlich nur dann etwas Besonderes, wenn (wie in diesem Fall) die Klickserien selbst unterschiedlich sind.

Man könnte denke, dass dies eine ganz außergewöhnliche Situation ist. Aber dem ist nicht so! Wir werden nun in wenigen Schritten feststellen, dass eine ganze Menge effektgleicher Klickserien auf einem 1x5-Spielfeld zu finden sind!

b) Wenn man K_1 K_4 K_2 K_5 ausführt, ergibt sich keine Veränderung. Warum ist das so?

Eine solche Klickserie, die nichts verändert, nennen wir *stille Klickserie*.

c) Erkläre, warum die Klickserien K_1 K_2 und K_4 K_5 effektgleich sind.

d) Finde eine Klickserie, welche effektgleich mit der Klickserie ist, welche allein aus dem Klick K_1 besteht.

In effektgleichen Klickserien können auch Klicks vorkommen, die Teil beider Klickserien sind:

e) Finde eine Klickserie, welche effektgleich mit der Klickserie K_1 K_2 K_3 ist.

Mit dem folgenden Verfahren kann man effektgleiche Klickserien finden: Ergänze eine gewählte Klickserie hinten um die Klicks K_1 K_2 K_4 K_5 und entferne die doppelten Klicks. Die resultierende Klickserie ist effektgleich zu der Klickserie mit der begonnen wurde.

f) Kontrolliere, dass das Verfahren bei den vorangegangenen Beispielen funktioniert und gebe eine Erklärung.

g) Begründe: Auf einem 1x5-Spielfeld gibt es 16 Paare effektgleicher Klickserien.

13. [Erkundung]

a) Auch auf einem 1x8-Spielfeld kann man effektgleiche Klickserien finden. Finde einen Partner zu K_1 K_4 K_7.

b) Was ist das kleinste Spielfeld, auf dem es effektgleiche Klickserien gibt?

14. [Erkundung]

a) Begründe: Auf jedem Spielfeld gibt es gleich viele mögliche Konfigurationen (inkl. der Nullkonfiguration) wie echt verschiedene Klickserien (inkl. der Klickserien, die aus keinem Klick besteht).

b) Begründe: Manchmal ist jedoch die Anzahl der echt verschiedenen Klickserien ungleich der Anzahl der Schaltschemata.

c) Begründe: Daher kann man auf manchen Spielfeldern nicht jede Konfiguration aus der Nullkonfiguration erreichen.

Erinnere dich, was du bei *Frage 6* herausgefunden hast:

Es sind genau die Konfigurationen auflösbar, welche man durch Klicken von der Nullkonfiguration aus erreichen kann.

Daher gibt es auf manchen Spielfeldern Startkonfigurationen, die durch keine Klickserie in die Nullkonfiguration überführt werden kann.

Wie schade...! Aber gut, dass wir das jetzt wissen.

Lass uns daher untersuchen, welche Konfigurationen gelöst werden können und wie.

C: 1×n-Spielfelder und das ‘Umplatzieren’ von Lampen

In diesem Teil lernst du eine Technik kennen, mit der man auf einem 1x*n*-Spielfeld ziemlich weit kommt. Hier gibt es eine Einführung. In der Hauptaufgabe aus Teil ZWEI kannst du die Idee weiter führen.

15. [Erkundung]

Bei dieser Erkundung wird ein 1x*n*-Spielfeld mit $n>3$ verwendet.

a) Welches Schaltschema gehört zur Klickserie K_2 K_3? Was bedeutet das für die Lampen 1 und 4? Und für die Lampen 2 und 3?

b) Welches Schaltschema gehört zur Klickserie K_i K_{i+1}? Was bedeutet das für die Lampen 1 und 4? Und für die Lampen i-1 und i+2?

c) Welche Schaltschemata gehören zu den Klickserien K_1 K_2 und K_{n-1} K_n? Welche Lampen werden nun umgeschaltet?

Die Idee, zwei Nachbarlampen anzuklicken, lässt sich auf alle *1*×*n*-Spielfelder übertragen.

16. [Erkundung]

Auf folgendem 1×15-Spielfeld ist mit Kreuzen angegeben, welche Lampen angeklickt werden:

			x	x		x	x		x	x				

Welches Schaltschema gehört zu dieser Klickserie?

Mit dieser Technik kann man also Lampen umschalten, die einen Abstand von 3 zueinander haben – und durch mehrfache Anwendung auch solche, die einem Abstand haben, welcher ein Vielfaches von 3 ist. In diesem Beispiel war es der Abstand 9.

17. [Aufgabe C]

Als Beispiel untersuchen wir ein 1×10-Spielfeld.

Die Lampen der Gruppe {1, 4, 7, 10} können mit dieser Technik jeweils gegenseitig umschaltet werden.

a) Welche Gruppe gegenseitig umschaltbarer Lampen erhält man mit Lampe 2? Und mit Lampe 3?

Auch die Lampen 1 und 2 sind gegenseitig umschaltbar, ebenso wie die Lampen 9 und 10.

b) Auf einem 1×10-Spielfeld sind die Lampen 1, 3, 7 und 9 angeschaltet. Erstelle eine Klickserie (verwende 'Plan erstellen'), mit welcher die Nullkonfiguration erreicht wird.

c) Nun sind nur die Lampen 1, 3 und 8 eingeschaltet. Mit welcher Klickserie erhält man jetzt die Nullkonfiguration?

D: Jagen

Eine im Internet häufig genannte Technik, um ein Light Out - Rätsel zu lösen, heißt *'Jagen'*.

Ausgehend von einer gegebenen Startkonfiguration kann man – in vertikaler Richtung – nacheinander in jeder (außer der letzten) Zeile die angeschalteten Lampen ausschalten, indem man in der darunter liegenden Zeile alle Lampen anklickt, welche unter einer angeschalteten Lampe liegen.

Ein Beispiel

Bei der unten gegebenen Startkonfiguration auf einem 4×3-Spielfeld sorgt die Klickserie $K_{2,1}$ $K_{2,3}$ (siehe die unterstrichenen Lampen in Zeile 2) dafür, dass die Lampen (1, 1) und (1, 3) ausgeschaltet werden. Danach sorgt $K_{3,1}$ $K_{3,3}$ in Reihe 3 dafür, dass die zwei eingeschalteten Lampen in Zeile 2 ausgeschaltet werden. Zuletzt schaltet $K_{4,3}$ in Zeile 4 die eine angeschaltete Lampe in Zeile 3 aus.

Start-konfiguration

1	0	1
$\underline{0}$	0	$\underline{0}$
0	0	1
0	1	0

→

Zeile 1 ausgeschaltet

0	0	0
1	0	1
$\underline{1}$	0	$\underline{0}$
0	1	0

→

Zeile 2 ausgeschaltet

0	0	0
0	0	0
0	0	1
1	1	$\underline{1}$

→

Zeile 3 ausgeschaltet

0	0	0
0	0	0
0	0	0
1	0	0

18. [Erkundung]

a) Vollziehe das obige Beispiel in der App nach: Erstelle die Startkonfiguration und schalte nacheinander die Zeilen 1 bis 3 durch jagen aus.

Bei dem Versuch, die Startkonfiguration durch Jagen zu lösen, bleibt zuletzt nur noch die letzte Zeile übrig. Für diese Zeile gibt es einen Trick, von dem man erst dann sieht, dass er funktioniert, wenn man damit tatsächlich die Nullkonfiguration erreicht.

b) Klicke nun auf die Lampe (1, 3) und jage die angeschalteten Lampen wieder nach unten. Überraschung! Du kommst bei der Nullkonfiguration raus!

Die auf der Hand liegende Frage ist nun: Wie mag man auf die mysteriöse Idee kommen, dass man (1,3) anklicken muss und nicht eine andere Lampe oder eine Kombination von Lampen in der ersten Reihe? Denn du magst keinen Hokuspokus, oder?

Die ehrliche Antwort lautet:

In Zeile 1 wurden alle acht möglichen Klickkombinationen eine nach der anderen ausprobiert. Der Klick allein auf (1,3) erzielt das Gewünschte. Es war also eine Suche, aber sie ist beschränkt auf die acht möglichen Klickkombinationen in der ersten Zeile.

Jetzt gehen wir der Frage nach, was genau bei dem Klick auf (1,3) und dem anschließenden Jagen passiert ist.

19. [Erkundung]

Beginne mit einem leeren 4×3-Spielfeld.

a) Klicke auf die Lampe (1,3). *Sehr wichtig:* Nutze nicht 'einzelne Lampen umschalten', sondern klicke auf (1,3) mit der Option 'Klicks direkt ausführen'.

b) Jage die angeschalteten Lampen nach unten.

Das Resultat ist genau die Konfiguration nach dem ersten Jagen in der gegebenen Startkonfiguration im Beispiel weiter oben!

Das Beispiel in *Frage 18* wurde also durch die folgenden Schritte gelöst:

- Aus der Startkonfiguration einmal jagen,
- auf (1,3) klicken und
- nochmals jagen.

c) Erkläre, warum diese Schritte zum Ergebnis führen.

Im Falle anderer Lampen und derer Kombinationen funktioniert es nicht so. Dazu müssen erst die acht Kombinationen in der ersten Zeile ausprobiert werden!

Beim 4×3-Spielfeld gibt es in Zeile 1 acht mögliche Klickserien. Für den Fall dass man mit Lampe (1,3) startet, hast du das Resultat in *Frage 18* gesehen**.**

20. [Erkundung]

Beginne stets mit der Nullkonfiguration und nutze die Option 'Klicks direkt ausführen' (nicht mit 'einzelne Lampen umschalten'). Jage für alle acht möglichen Klickserien auf dem leeren Spielfeld in Zeile 1 die angeschalteten Lampen nach unten und notiere das Resultat in Zeile 4 in der Tabelle. Für Lampe (1,3) ist das Ergebnis schon eingetragen.

Klickserien in Zeile 1	**Resultat in Zeile 4**
kein Klick	....
nur (1, 1)	....
nur (1, 2)	....
nur (1, 3)	1 0 0
(1, 1) und (1, 2)	....
(1, 1) und (1, 3)	....
(1, 2) und (1, 3)	....
alle drei Lampen	....

Nimm nun eine beliebige Startkonfiguration auf dem 4×3-Spielfeld, von dem du die Lösung kennen möchtest, falls es eine gibt. Nenne diese Startkonfiguration A.

Mit dem Jagen gelangst du in eine Situation, in welcher nur noch in der Zeile 4 (möglicherweise) Lampen angeschaltet sind. Mit etwas Glück landest du sofort in der Nullkonfiguration, aber das ist eher die Ausnahme als die Regel!

Falls noch Lampen in Zeile 4 angeschaltet sind, gehe in der Tabelle auf die Suche nach einer Klickserie auf dem leeren Spielfeld in Zeile 1, die nach dem Jagen das gleiche Resultat in Zeile 4 liefert. Führe diese Klickserie aus uns jage erneut nach unten, um zur Nullkonfiguration zu gelangen.

21. [Erkundung]

Begründe, warum diese Strategie der Jagd und (falls nötig) erneuten Jagd funktioniert.

Du musstest für diese Methode nur einmal die Tabelle erstellen, um diese bei jeder beliebigen der 4.096 verschiedenen Startkonfiguration auf dem 4x3-Spielfeld zu gebrauchen.

Bliebt noch eine Frage...

22. [Aufgabe D]

Sind alle Startkonfigurationen auf dem 4x3-Spielfeld auflösbar? Nutze die Tabelle aus *Frage 20*, um dies zu untersuchen.

E: Konfigurationen und Zweierpotenzen

In diesem Teil geht es ganz allgemein zu: Du lernst nichts über die Lösung spezifischer Konfigurationen. Aber du bekommst einen schönen Blick über die Gesamtheit der möglichen Konfigurationen auf beliebigen Spielfeldern und über die Anzahl der lösbaren Konfigurationen. Schlüsselwörter für diesen Teil sind: *Genau zählen* und G*eschickt einteilen*.

Achtung! Dieser Teil ist ziemlich schwierig und eher theoretischer Natur. Bearbeite diesen Teil nur, falls du noch genügend Zeit am Vormittag hast. Dieser Teil ist vor allem dann wichtig, wenn du Hauptaufgabe D im zweiten Teil bearbeiten möchtest.

Zählen von Konfigurationen und Klickserien

23. [Erkundung]

a) Auf dem 4×3-Spielfeld gibt es 12 Lampen. Jede dieser Lampen kann an- oder ausgeschaltet sein. Überzeuge dich davon, dass es daher 2^{12} mögliche Konfigurationen gibt.

Auch das 2×6-Spielfeld und das 1×12-Spielfeld haben jeweils 2^{12} Konfigurationen. Für die Anzahl der Konfigurationen ist allein die Anzahl der Lampen ausschlaggebend – nicht die Form des Spielfeldes. Die Anzahl der Lampen nennen wir *N*.

b) Wie groß ist die Anzahl der echt verschiedenen Klickserien auf einem Spielfeld mit *N* Lampen? Wir betrachten dabei 'nichts klicken' auch als eine Klickserie.

Die Klasse der verbundenen Konfigurationen

Mit Hilfe eines Schaltschemas (zugehörig zu einer Klickserie) kann man von einer Konfiguration zu einer anderen kommen. Du weißt bereits:

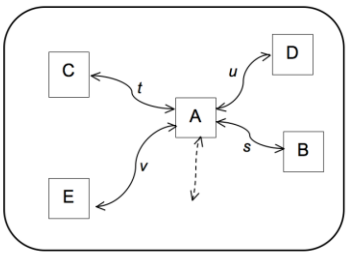
- Wenn man mit einem Schaltschema *S* von der Konfiguration *A* zur Konfiguration *B* gelangen kann, dann gelangt man mit *S* von *B* nach *A*. In diesem Fall nennen wir A und B verbundene Konfigurationen. *Achtung:* Jede Konfiguration ist mit sich selbst verbunden durch das Schaltschema aus lauter 0-en (kein Klick / nichts tun)!
- Wenn man mit einem Schaltschema *S* von Konfiguration *A* zur Konfiguration *B* gelangen kann und auch mit einem anderen Schaltschema *T* nach *C*, dann kann man auch von *B* nach *C* gelangen durch die Kombination der beiden Schaltschemata (bzw. der zugehörigen Klickserien) Anders ausgedrückt: Konfigurationen, die mit *A* verbunden sind, sind auch untereinander verbunden.

24. [Erkundung]

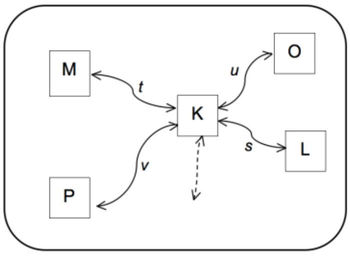
Begründe: Die Anzahl der mit einer beliebigen Konfiguration *A* verbundenen Konfigurationen ist gleich der Anzahl der möglichen (unterschiedlichen) Schaltschemata.

Zur Erinnerung: Oft gibt es weniger Schaltschemata als echt verschiedene Klickserien und somit auch weniger Schaltschemata als mögliche Startkonfigurationen. (Falls du das nicht glaubst, zähle nochmals die Anzahl der möglichen Konfigurationen auf dem 1x2-Spielfeld, die Anzahl der möglichen echt verschiedenen Klickserien und die Anzahl der (unterschiedlichen) Schaltschemata.) Die Menge aller mit *A* verbundenen Konfigurationen nennen wir *Konfigurationsklasse A*.

In der Abbildung sind ein paar Verbindungen zwischen *A* und anderen Konfigurationen und mit den Pfeilen die dazwischen liegenden Schaltschemata dargestellt. Das Bild ist aber nicht vollständig, denn es gibt meist viel mehr Verbindungen. Die Konfigurationen innerhalb der Klasse sind auch alle untereinander verbunden durch Schaltschemata, aber das ist hier nicht dargestellt. Das abgerundete Rechteck soll die Begrenzung der *Konfigurationsklasse A* darstellen.



Die Klasseneinteilung der Gesamtkonfigurationen



Falls Konfiguration *K* nicht in der *Konfigurationsklasse A* liegt, dann gibt es auch von *K* aus für jedes mögliche Schaltschema einen Pfeil zu einer mit *K* verbundenen Konfiguration. All diese Konfigurationen bilden zusammen die *Konfigurationsklasse K*.

25. [Erkundung]

Stelle dir vor: *A* und *K* sind nicht verbunden und *X* ist eine Konfiguration in *Konfigurationsklasse A* und *Y* in *Konfigurationsklasse K*. Dann sind *X* und *Y* nicht miteinander verbunden.

a) Kannst du das begründen? Deine Erklärung kann beispielsweise so beginnen: 'Falls X und Y doch verbunden wären, dann wären ... und ... auch ...'

Man kann es so ausdrücken: Die *Konfigurationsklasse A* und die *Konfigurationsklasse K* sind komplett getrennt (disjunkt).

b) Begründe: Alle lösbaren Startkonfigurationen bilden genau eine Konfigurationsklasse!

Es gilt natürlich auch: Wenn *B* in der *Konfigurationsklasse A* liegt, dann sind die *Konfigurationsklasse A* und die *Konfigurationsklasse B* identisch.

Zusammenfassung:

- Die Menge aller Konfigurationen ist nun eingeteilt in Konfigurationsklassen.
- Alle Konfigurationen einer Konfigurationsklasse sind miteinander verbunden.
- Konfigurationen aus unterschiedlichen Konfigurationsklassen sind nicht verbunden.
- Alle Konfigurationsklassen beinhalten die gleiche Anzahl von Konfigurationen, nämlich genau so viele wie es unterschiedliche Schaltschemata gibt.

26. [Erkundung]

a) Begründe: Wenn man die Anzahl der Konfigurationen aller Konfigurationsklassen addiert, kommt man auf 2^N.

b) Warum sind alle Konfigurationsklassen gleich groß? Und wie groß sind sie verglichen mit der Anzahl der Schaltschemata?

c) Erkläre die folgende Gleichung:
(Anzahl der Konfigurationsklassen) × (Anzahl der Schaltschemata) = 2^N

d) Warum muss die Anzahl der Konfigurationsklassen und die Anzahl der Schaltschemata jeweils von der Form 2^p sein, mit $p = 0, 1, 2, 3, ...$?

e) Leite aus der vorigen Gleichung her, indem du deine Kenntnisse aus früheren Fragen nutzt:
(Anzahl der Konfigurationsklassen) × (Anzahl der lösbaren Konfigurationen) = 2^N

Teil ZWEI (eigene Forschung)

Im ersten Teil wurden verschiedene Techniken erkundet: *Umplatzieren* (indem Gruppen von Lichtern gebildet wurden, die gegenseitig erreicht werden konnten), *Jagen* und *erneutes Jagen* von einem leeren Spielfeld aus (alle Lampen aus). Es wurden auch verschiedene Bezeichnungen eingeführt: *Schaltschema*, *effektgleiche Klickserien* und *stille Klickserien*. Diese Techniken und Bezeichnungen werden sich bei der Bearbeitung der folgenden Hauptaufgaben als nützlich erweisen.

Triff eine kluge Wahl: Lieber zwei Hauptaufgaben gründlich bearbeiten als alle Hauptaufgaben halb und oberflächlich zu behandeln!

Hauptaufgabe A: 1×*n*-Spielfelder

Gegeben ist ein $1{\times}n$-Spielfeld. Nutze die Erkenntnisse aus dem ersten Teil, um zu untersuchen, welche Startkonfigurationen darauf lösbar sind und welche nicht. Versuche dies für alle Werte von n zu analysieren.

Hauptaufgabe B: Jagen (und erneutes Jagen)

'*Jagen*', '*erneutes Jagen*' und '*stille Klickserien*' können nützlich sein um festzustellen, ob eine gegebene Startkonfiguration auf einem mxn-Spielfeld lösbar ist.

a) Analysiere die Startkonfigurationen auf dem 5×5-Spielfeld (das Original-Spiel), welche sich als lösbar erweisen. Verwende dabei alle möglichen Endkonfigurationen des erneuten Jagens von Klickserien in der ersten Reihe auf dem leeren Spielfeld.

b) Kannst du nun Rätsel 3 aus dem 'Aufwärmen' mit einer Klickserie lösen?

c) Was gibt es bei einem $m{\times}n$-Spielfeld mit beliebiger Startkonfiguration zu entdecken? Analysiere beispielsweise das mx3-Spielfeld.

Hauptaufgabe C: Alles an, alles aus

Es wird behauptet, dass es auf jedem mxn-Spielfeld, bei dem alle Lampen eingeschaltet sind, eine Klickserie gibt, die zur Nullkonfiguration führt. Für $1{\times}n$-Spielfelder wurde das in *Frage 8* untersucht.

a) Untersuche die Auflösbarkeit auf dem 2xn-Spielfeld für beliebige Werte von n.

b) Untersuche ein paar andere Fälle, beispielweise das $n{\times}n$-Spielfeld für n = 2, 3 und 4.

Hauptaufgabe D: Konfigurationsklassen und Klickserien

Diese Hauptaufgabe greift auf Abschnitt E aus dem ersten Teil zurück. Falls du diesen Abschnitt wegen Zeitmangels überspringen hast, macht es keinen Sinn, diese Hauptaufgabe zu probieren!

Eine These:

Anzahl der Konfigurationsklassen = Anzahl der stillen Klickserien

Untersuche diese These!
Hinweis: Erstelle eine Einteilung der Klickserien in Gruppen effektgleicher Klickserien.

Noch zwei weitere Aufgaben:

Die Anzahl der auflösbaren Startkonfigurationen auf dem mxn-Spielfeld

In diesem Fall haben wir $N = m{\times}n$ Lampen. Nehme an, dass $m \geq n$ gilt.

Wenn man in einer gegebenen Startkonfiguration die angeschalteten Lampen nach unten jagt, gelangt man zu einer Endkonfiguration mit ausschließlich 0-en in den Zeilen *1* bis *m-1* und möglicherweise 1-sen in der Zeile *m*.

Zwei Gegebenheiten, welche du nutzen kannst (und von deren Korrektheit du dich natürlich überzeugen solltest):

- Eine Startkonfiguration und eine zugehörige Endkonfiguration liegen immer in derselben Konfigurationsklasse.
- Es gibt höchstens 2n verschiedene Endkonfigurationen nach dem Jagen und daher auch höchstens 2n verschiedene Konfigurationsklassen.

Beweise, dass es im genannten Fall immer mindestens $2^{(m-1)\cdot n}$ lösbare Konfigurationen gibt.

Auf dem 5×5-Spielfeld sind nur 25% aller Startkonfigurationen lösbar.

Hinweis: Verwende Hauptaufgabe B und Abschnitt E aus Teil EINS.