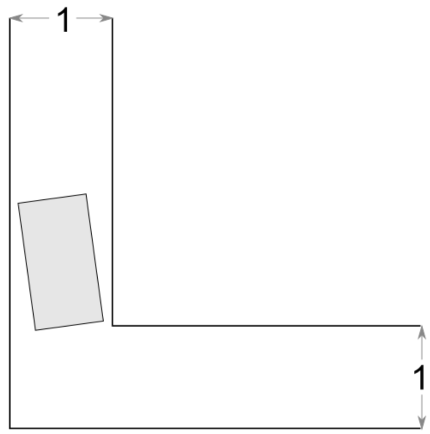
Mathematatik B-Tag 2015

Freitag, 20. November, 8:00 – 15:00 Uhr

Um die Ecke

Erkundung 1 (Klavier)

Ein Klavier soll durch einen 1 m breiten Gang um die Ecke (rechter Winkel) geschoben werden. Die Abbildung rechts zeigt die Situation von oben. Kann man das Klavier (1,54 m lang und 0,60 m breit) um die Ecke schieben? Untersucht diese Frage z.B. mit einer Rechnung, einer Zeichnung oder einem Experiment.



Erkundung 2 (Sofa)

Betrachtet man ein Sofa von oben, so handelt es sich näherungsweise um ein Rechteck. Kann ein Sofa mit den Maßen 1,36 m (Länge) x 0,78 m (Breite) um die Ecke geschoben werden?

Erläuterung

Anhand dieser beiden Beispiele habt ihr festgestellt, dass man das eine Rechteck durch den Gang um die Ecke schieben kann, ein anderes mit demselben Umfang jedoch nicht.

Heute sollt ihr die Problemstellung des "Um die Ecke Schiebens" genauer untersuchen. Hierbei geht es jedes Mal um die Frage, ob bestimmte Objekte durch einen 1 m breiten Gang um eine Ecke mit rechtem Winkel geschoben werden können. Die Aufgaben des heutigen Tages behandeln also Probleme der Bewegung in der zweidimensionalen Ebene. Die Höhe der Objekte spielt dabei keine Rolle.
Wir gehen im Folgenden davon aus, dass die Breite des Ganges 1 ist (ohne Einheit). Außerdem könnt ihr davon ausgehen, dass Objekte der Breite 1 exakt durch die geraden Abschnitte des Ganges passen. Ein Quadrat der Seitenlänge 1 oder ein Kreis vom Radius 1 können also durch den Gang geschoben werden.

Wenn in den Aufgaben "durch den Gang bewegen" steht, ist damit immer auch gemeint, dass das Objekt um die Ecke bewegt werden soll. Der Begriff "Bewegen" steht hier für jede Art von Bewegung in der Ebene (also Parallelverschiebung oder Drehung oder Kombinationen davon).

Allgemeines zum Mathematik B-Tag

Ablauf des Tages

Diese Aufgabe zum B-Tag besteht aus mehreren Erkundungen, Aufgaben sowie einem Forschungsauftrag. Plant für den Forschungsauftrag etwa die Hälfte der gesamten Zeit ein.

Was müsst ihr abgeben?

Am Ende des Tages müsst ihr eine Ausarbeitung abgeben. Darin beschreibt ihr die Ergebnisse, die ihr bei jeder *Aufgabe* und dem *Forschungsauftrag* herausgefunden habt. Die *Erkundungen* braucht ihr dabei nicht aufzuschreiben - diese dienen nur dazu, euch in das Thema einzuführen.

Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten und ergänzt erklärende Zeichnungen, wenn es für ein besseres Verständnis angebracht ist. Eure Ausarbeitung soll auch für diejenigen verständlich sein, die nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen haben, aber über genügend mathematische Kenntnisse verfügen. Das heißt insbesondere, dass ihr verständlich in das Thema einführen müsst und dass ihr, wenn nötig, auf Ergebnisse aus vorherigen Aufgaben zurückgreift.

Mit anderen Worten: Schreibt einen eigenen klaren Bericht, den ihr mit mathematischen Argumenten belegt. Auch die Darstellung wird bei der Bewertung berücksichtigt!

Es kann sinnvoll sein, bereits am Vormittag die Ausarbeitung zu einigen Aufgaben in eine saubere und übersichtliche digitale Form zu bringen. Behaltet die Zeit immer im Blick und beachtet, dass die Deadline für die Abgabe 15 Uhr ist!

Informationen im Internet

Ihr werdet sehen, dass es im Internet einige Informationen zu diesem Problem gibt (z.B. unter https://de.wikipedia.org/wiki/Sofaproblem). In der heutigen Aufgabe geht es jedoch vorwiegend um andere Formen eines solchen "Sofas".

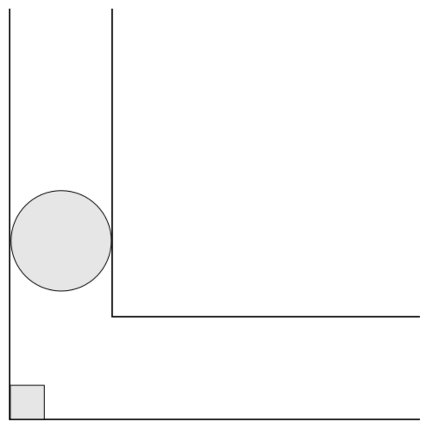
Viel Erfolg und noch mehr Spaß bei dieser mathematischen Herausforderung!!

Erkundung 3 (Halbe Kreisscheibe)

a) Wie groß darf der Radius einer halben Kreisscheibe höchstens sein, damit diese noch durch den Gang bewegt werden kann?

b) Beschreibt so genau wie möglich eine Bewegung, mit der die halbe Kreisscheibe von maximalem Radius durch den Gang bewegt werden kann.
Beispiel: Bringe die Scheibe zunächst in die Position ..., verschiebe sie um die Strecke ... in Richtung ..., drehe danach um ... Grad um den Drehpunkt ..., etc.

Erkundung 4 (Kreis)

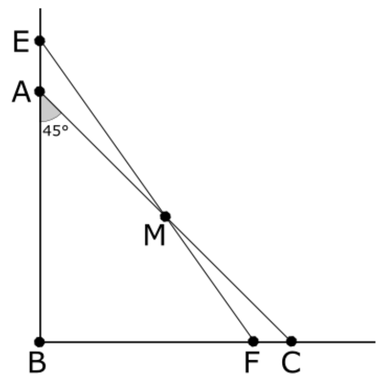


Ein Kreis mit dem Durchmesser 1 kann durch den Gang bewegt werden. Angenommen, außen in der Ecke steht ein Quadrat im Weg (s. Abbildung). Wie groß darf dann die Seitenlänge des Quadrats höchstens sein, damit der Kreis noch hindurch passt?

Intermezzo

Bevor ihr noch mehr Aufgaben über das Bewegen von Objekten um die Ecke bearbeitet, folgen hier erst einmal zwei Aufgaben, die euch später am Tag noch von Nutzen sein können.

Aufgabe 1 (Dreiecksgeometrie)



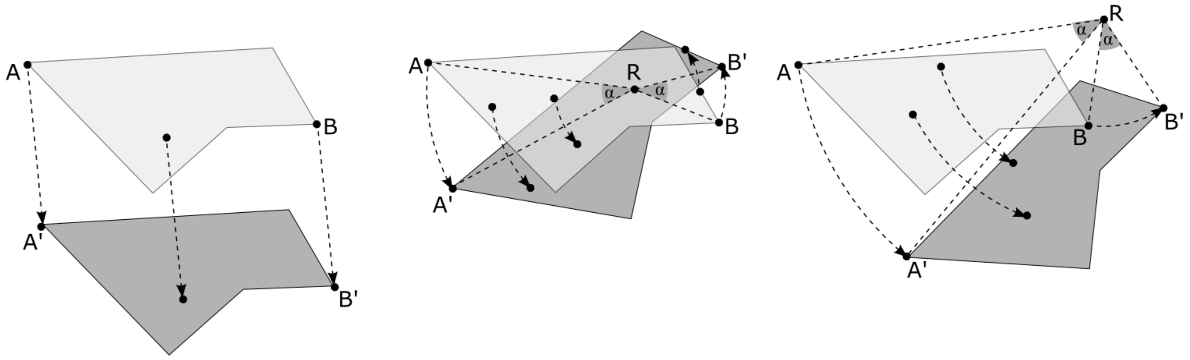
Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck ABC, wobei M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AC}$ ist. Außerdem sei F ein beliebiger Punkt auf der Seite $\overline{BC}$ und die Gerade FM schneide die Gerade AB im Punkt E.
Zeige, dass die Strecke $\overline{EF}$ länger als die Strecke $\overline{AC}$ ist.

Bemerkung: *Auch wenn es euch nicht gelingt, diese Aufgabe zu beweisen, dürft ihr in den weiteren Aufgaben davon ausgehen, dass die Strecke* $\overline{\boldsymbol{EF}}$ *länger als die Strecke* $\overline{\boldsymbol{AC}}$ *ist.*

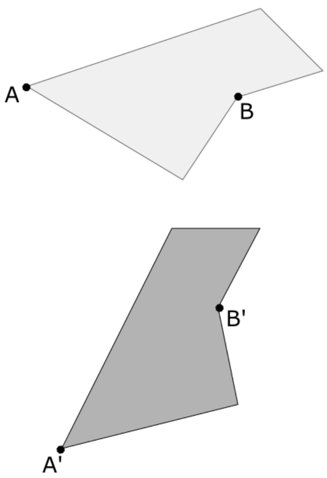
Aufgabe 2 (Verschiebungen)

Man kann Objekte durch Parallelverschiebung (ohne gleichzeitige Drehung) oder durch Drehung um ein festes Drehzentrum (ab jetzt R genannt) bewegen. In der unten stehenden Abbildung seht ihr ein Beispiel für eine Parallelverschiebung und zwei Beispiele für Drehungen. Bei der Parallelverschiebung gilt immer, dass $|AA'| = |BB'|$ und dass AA' und BB' parallel sind. Bei den Drehungen gilt, dass $|AR| = |A'R|$, $|BR| = |B'R|$ sowie $\angle ARA' = \angle BRB'$.

Bemerkung: Wenn innerhalb des geknickten Ganges eine Parallelverschiebung durchgeführt wird, dann müssen alle Verbindungsstrecken (wie z.B. $\overline{AA'}$ und $\overline{BB'}$) innerhalb des Ganges liegen. Bei den Drehungen müssen alle Kreisbögen (wie z.B. AA´ und BB´) innerhalb des Ganges verlaufen, **allerdings muss das Drehzentrum R nicht im Gang liegen.**



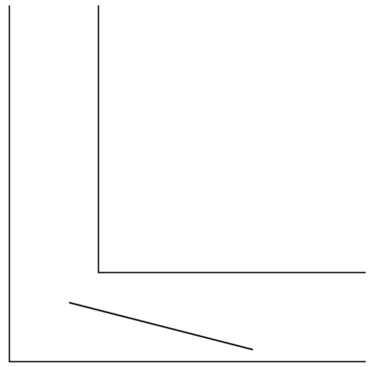
In der folgenden Abbildung kann die helle Figur durch eine einzige Drehung auf die dunkle Figur abgebildet werden. Erläutert, wie man das zugehörige Drehzentrum bestimmen kann.



Kommen wir zurück zum Bewegen von Objekten durch unseren Gang ...

Aufgabe 3 (Stöcke)

In dieser Aufgabe sollt ihr untersuchen, welche Stöcke ihr durch den Gang bewegen könnt und welche nicht. Betrachtet dabei den Stock als eine Strecke mit fester Länge.



a) Führt euch die Situation durch ein kleines Experiment (z.B. mit Folie oder mit einer Zeichnung) vor Augen, um einen Eindruck davon zu bekommen, welche Stöcke durch den Gang bewegt werden können und welche nicht.

b) Mit Hilfe eurer Ergebnisse aus Aufgabe 1 könnt ihr nun herausfinden, welche Stöcke mit Sicherheit nicht um die Ecke bewegt werden können. Welche sind das? Welche Länge kann ein Stock höchstens haben, damit er noch um die Ecke bewegt werden kann?

c) Zeigt, dass ihr den längsten Stock aus Teilaufgabe b) tatsächlich um die Ecke bewegen könnt und dass dieser nicht stecken bleibt.

Aufgabe 4 (Strategien für den längsten Stock)

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, den längsten Stock um die Ecke zu bewegen.

a) In Aufgabe 2 habt ihr Drehungen untersucht. Ihr könnt den längsten Stock mit einer einzigen Drehbewegung um ein Drehzentrum R um die Ecke bewegen. Wie müsst ihr das Drehzentrum R wählen, damit der längste Stock auf diese Weise um die Ecke bewegt werden kann? Gebt auch die Ausgangsposition des Stockes an, in der die Drehung beginnt.

   Tipp: *Geht von der Position aus, in der die Enden des Stocks die Außenwände berühren und der Stock gleichzeitig die innere Kante der Wand berührt. Wenn dies eine Momentaufnahme der Drehung ist, kann man den Kreis finden, den die Enden des Stocks beschreiben.*

b) Skizziert die Fläche, die während der Drehung aus Aufgabenteil a) vom Stock überstrichen wird.

c) Man kann den Stock auch durch den Gang bewegen, indem die beiden Enden des Stocks ständig mit den Außenwänden des Ganges in Kontakt bleiben. Beschreibt so exakt wie möglich die Kurve, auf der sich der Mittelpunkt des Stocks hierbei bewegt.

d) Skizziert auch für die Bewegung aus Aufgabenteil c) die Fläche, die vom Stock überstrichen wird.

Aufgabe 5 (Größte Rechtecke)

In der ersten Erkundung habt ihr bereits Rechtecke untersucht. In dieser Aufgabe sollt ihr das flächenmäßig größte Rechteck finden, das durch den Gang bewegt werden kann.

a) Wie groß ist der Flächeninhalt des größten Rechtecks, das um die Ecke bewegt werden kann, wenn die kürzere Seite des Rechtecks die Länge 0,5 hat?

b) Untersucht, welche Seitenlängen ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt hat, das durch Parallelverschiebungen und Drehungen durch den Gang bewegt werden kann. Die kürzere Seite darf dabei nicht größer als 0,5 sein.

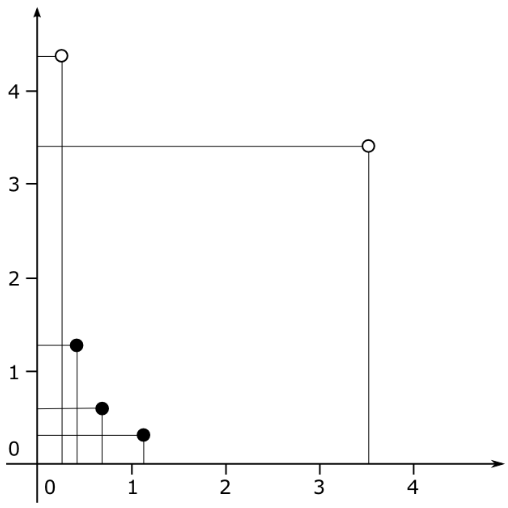
c) Zeigt, dass das Rechteck, das ihr in b) gefunden habt, auch wirklich um die Ecke bewegt werden kann und an keiner Stelle hängen bleibt.

Aufgabe 6 (Alle Rechtecke)

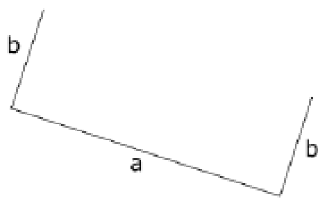
Ihr habt bislang Rechtecke mit maximaler Oberfläche erforscht, die durch den Gang bewegt werden können. Aber wie sieht es mit anderen Rechtecken aus?
In der untenstehenden Abbildung seht ihr ein Koordinatensystem. Darin sind fünf Rechtecke so eingezeichnet, dass eine Seite auf der x-Achse und eine andere auf der y-Achse liegt. Die rechte obere Ecke der Rechtecke ist schwarz markiert, wenn das zugehörige Rechteck um die Ecke bewegt werden kann und weiß, wenn dies nicht der Fall ist.

a) Wo genau verläuft die Grenze zwischen schwarzen und weißen Punkten?

b) Durch welche Gleichung oder durch welchenTerm lässt sich diese Grenze mathematisch beschreiben?



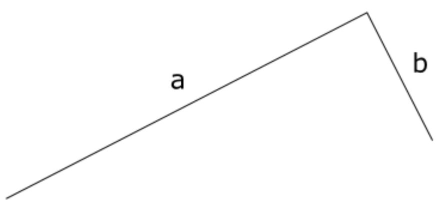
Aufgabe 7 (U-Form)



An die Enden des längsten geraden Stocks kann man im rechten Winkel jeweils einen weiteren geraden Stock befestigen, so dass man eine U-Form erhält. Findet heraus, welche maximale Länge ein solcher U-förmiger Stock haben kann, damit dieser noch um die Ecke bewegt werden kann. (Länge = a + 2b, wie in der Abbildung dargestellt)

Aufgabe 8 (L-Form)

In dieser Aufgabe betrachten wir einen Stock mit einem einzigen rechtwinkligen Knick (also eine L-Form). Welche maximale Länge (a + b in der untenstehenden Abbildung) kann ein solcher Stock haben, so dass er durch den Gang passt?



Forschungsauftrag

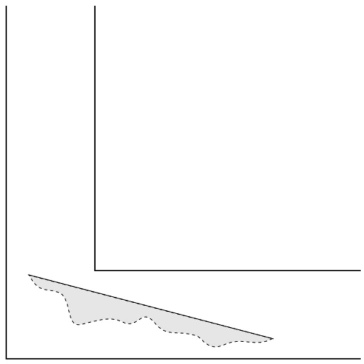
In den bisherigen Aufgaben habt ihr bereits viel über Objekte herausgefunden, die um die Ecke bewegt werden können oder auch nicht. Wusstet ihr, dass es sogar zu den **ungelösten** mathematischen Problemen zählt, welches das größte Objekt ist, das durch einen solchen Gang bewegt werden kann?

In diesem letzten Teil sollt ihr noch weitere Objekte untersuchen, die man um die Ecke bewegen kann - oder eben nicht. Ihr dürft nun selbst bestimmen, was ihr im Folgenden erforschen möchtet. Ihr könnt dabei auch eine Form wählen, die noch nicht untersucht wurde. Dabei könnt ihr z.B. die folgenden Aspekte betrachten:

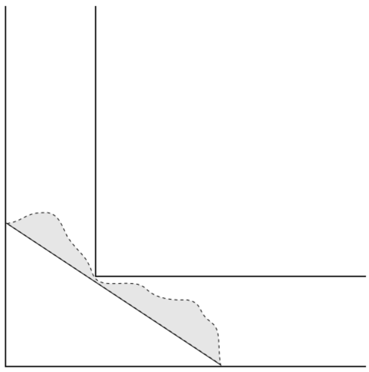
- maximale Länge oder maximaler Flächeninhalt des Objekts,
- verschiedene Strategien zur Bewegung des Objekts,
- Fläche, die das Objekt beim Bewegen überstreicht.

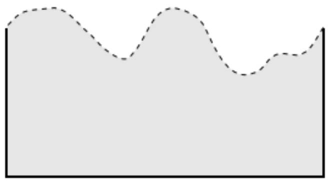
Ihr könnt auch eure Untersuchungen aus den bisherigen Aufgaben weiter vertiefen. Im Folgenden findet ihr hierzu einige Vorschläge. Ihr könnt einen (oder mehrere) dieser Vorschläge auswählen oder euch von ihnen zu einer eigenen Idee inspirieren lassen:

- Angenommen, der längste Stock wird wie in Aufgabe 4a) durch den Gang gedreht. An den Stock kann man eine Menge Fläche in Richtung der äußeren Wände anbauen, ohne dass diese Fläche beim Drehen im Weg ist (s. Abbildung). Wenn der Stock nicht maximal ist, geht vielleicht sogar noch mehr! Untersucht dies genauer.



- Angenommen, der längste Stock wird mit den Enden entlang der Außenwände geschoben (wie in Aufgabe 4c). An diesem Stock kann man noch eine Menge Fläche in Richtung der Innenwände hinzufügen, ohne dass diese Fläche beim Schieben um die Ecke im Weg ist (siehe Abbildung rechts). Wenn die Länge des Stocks nicht maximal ist, geht vielleicht sogar noch mehr! Untersucht dies genauer.



- Angenommen, der Stock hat eine U-Form wie in Aufgabe 7. An der Innenseite des U's kann man noch Fläche hinzufügen (s. Abbildung rechts). Wenn nun die gerade Rückseite des U-Stocks an der Wand entlang geschoben wird, wie viel Fläche kann man dann innen noch hinzufügen?
  
  Betrachtet z.B. erst den Fall, dass die Länge der hinteren Kante des U's nicht größer als die doppelte Breite des Gangs ist. Könnt ihr auch - evtl. auf experimentellem Weg - eine Form finden, wenn die hintere Kante länger ist?

- Findet ein zweidimensionales Objekt, das durch eine einzige Drehbewegung um die Ecke bewegt werden kann (wie in Aufgabe 4a).