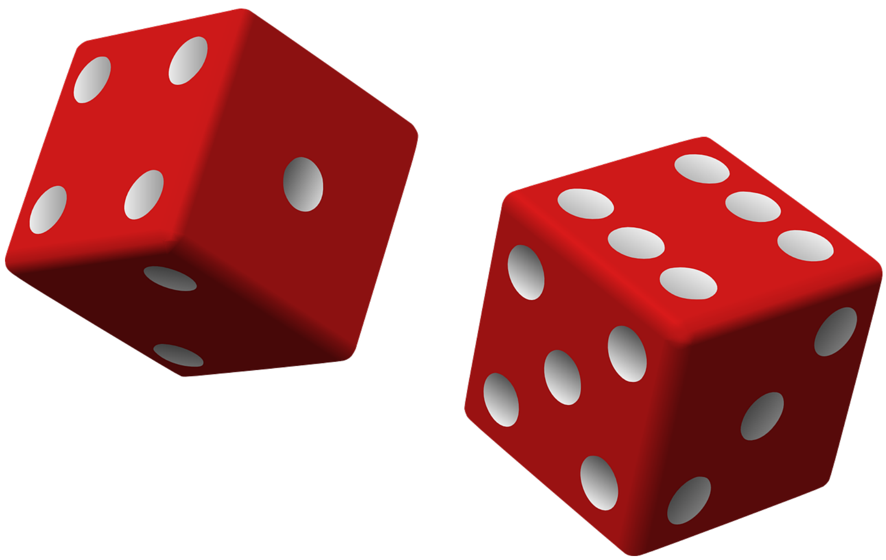
Die Würfel sind gefallen



Mathematik B-Tag 2016, Freitag 18. November, 8:00 - 15:00 Uhr

Einleitung

Über die Aufgabe

In einem Fußballspiel ist es oft spannend bis zum Ende. Immer wieder können seltsame Ergebnisse vorkommen. Dass Gladbach gegen Bayern und Bayern gegen Dortmund gewinnt, muss nicht bedeuten, dass Gladbach in der Folge auch gegen Dortmund gewinnt. Es kommt regelmäßig vor, dass Dortmund dann trotzdem gegen Gladbach gewinnt. Wer dann die stärkste der drei Mannschaften ist, bleibt immer noch unklar. Aber das ist Fußball...

Am Mathematik-B-Tag in diesem Jahr erforschen wir, ob dies auch beim Würfeln vorkommen kann. Wir untersuchen dazu ein einfaches Würfelspiel. Beide Spieler haben einen Würfel, werfen diesen und, wer die höchste Augenzahl wirft, gewinnt. Offensichtlich gibt es Sets von Würfeln, bei denen keiner der Würfelsteine eindeutig der stärkste im Spiel ist. Heute werdet ihr solche Würfel auch selbst erfinden.

Ablauf des Tages

Die Aufgabe dieses Mathematik-B-Tags besteht aus Basisaufgaben, Extraaufgaben und einer Abschlussaufgabe. Versucht, ungefähr die Hälfte des Tages an der Abschlussaufgabe zu arbeiten.

Was müsst ihr abgeben?

Am Ende des Tages reicht ihr eine Ausarbeitung ein. Darin beschreibt ihr eure Resultate zu den gestellten Aufgaben. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten und ergänzt erklärende Zeichnungen, wenn dies zum besseren Verständnis beiträgt. Eure Ausarbeitung soll auch für diejenigen verständlich sein, die nicht am Mathematik-B-Tag teilnehmen, aber über genügend mathematische Kenntnisse verfügen. Das bedeutet insbesondere, dass ihr verständlich in das Thema einführen müsst oder sollt und dass ihr, wenn nötig, auf Ergebnisse aus vorherigen Aufgaben zurückgreift.

Mit anderen Worten: Schreibt einen eigenen klaren Bericht, den ihr mit mathematischen Argumenten unterlegt. Auch die Darstellung wird bei der Bewertung berücksichtigt.

Es kann sinnvoll sein, bereits am Vormittag die Ausarbeitung zu einigen Aufgaben in eine saubere und übersichtliche digitale Form zu bringen. Behaltet die Zeit immer im Blick und bedenkt auch, dass die Deadline für die Abgabe 15 Uhr ist!

Basisaufgaben

Aufgabe 1 (Augen ergänzen)

Susanne und Robert haben alle beide einen normalen Würfel mit sechs Seitenflächen und auf diesen Seitenflächen jeweils 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen. Sie werfen diesen und wer die höchste Augenzahl wirft, gewinnt. Einmal gewinnt Robert, das andere Mal Susanne. Wenn sie nur oft genug spielen, dann werden sie alle beide näherungsweise die Hälfte der Spiele gewinnen. Das findet Susanne nicht gut.

a) Susanne zeichnet auf eine Seitenfläche mit 2 Augen ein Auge dazu. Sie spielt also jetzt mit 1, 3, 3, 4, 5, 6. Robert immer noch mit 1, 2, 3, 4, 5, 6. Wird Susanne nun auf die Dauer öfter gewinnen oder macht das nichts aus?

b) Robert hat mitbekommen, dass Susanne ein zusätzliches Auge auf die Seitenfläche mit zwei Augen gesetzt hat. Darum möchte er auch auf eine der Seitenflächen ein Auge ergänzen. Auf welcher Seitenfläche kann er am besten ein Auge ergänzen, um so oft wie möglich zu gewinnen? Ist es die Seitenfläche mit 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 Augen? Begründet auch eure Antwort.

Aufgabe 2 (Ist mehr immer besser?)

Auch Robert fliegt auf und sie beenden das Spiel. Susanne schlägt vor, mit drei neuen Würfeln zu spielen, die wir der Einfachheit halber T, U und V nennen. Susanne und Robert dürfen nicht alle beide mit dem selben Würfel spielen.

- $T : 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $U : 2, 3, 4, 5, 6, 7$
- $V : 1, 1, 1, 1, 1, 100$

Sie beginnen ein neues Spiel, bei dem Robert als Erster wählen darf, welchen Würfel er haben möchte. Susanne wählt als Zweite einen Würfel.

a) Welchen Würfel sollte Robert wählen und warum?

b) Angenommen, Robert wählt Würfel U. Welchen kann Susanne dann am besten wählen und warum?

Aufgabe 3 (Würfeln gegen DobbelBot)

Jetzt wird es Zeit, dass ihr selbst mal würfelt. Dies geschieht in digitaler Form. Ihr spielt dabei die Variante des Spiels, bei dem ihr als Erster einen Würfel aus dreien wählen dürft. Ihr spielt gegen DobbelBot, ein Computerprogramm, dass bemerkenswert gut in diesem Spiel ist.
Siehe `http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dobbelen/`
(verkürzte Adresse: `http://bit.ly/2fuJMwM`, oder benutze den QR-Code hier unten

Wie ihr seht, kann man aus drei Würfeln wählen. Würfel A z.B. hat sechs Seitenflächen und auf diesen Flächen stehen die Zahlen 3, 3, 5, 5, 7 und; es gibt also zwei Seiten, auf denen 3 Augen sind usw.. DobbelBot ist so freundlich, euch als Erstes einen Würfel wählen zu lassen. Bei Spieler 1 ist daher „ich“ vorausgewählt - lasst diese Einstellung so stehen.

Niederländisch	**Deutsch**
Begin opnieuw	Neustart
Kies een dobbelsteen	Wähle einen Würfel
Worp	Wurf
Dobbel	Würfle
Dobbel 50 keer	Würfle 50mal
aantal ogen	Augenzahl
aantal keer gewonnen	Anzahl der gewonnenen Spiele

Tabelle 1: Übersetzungshilfe

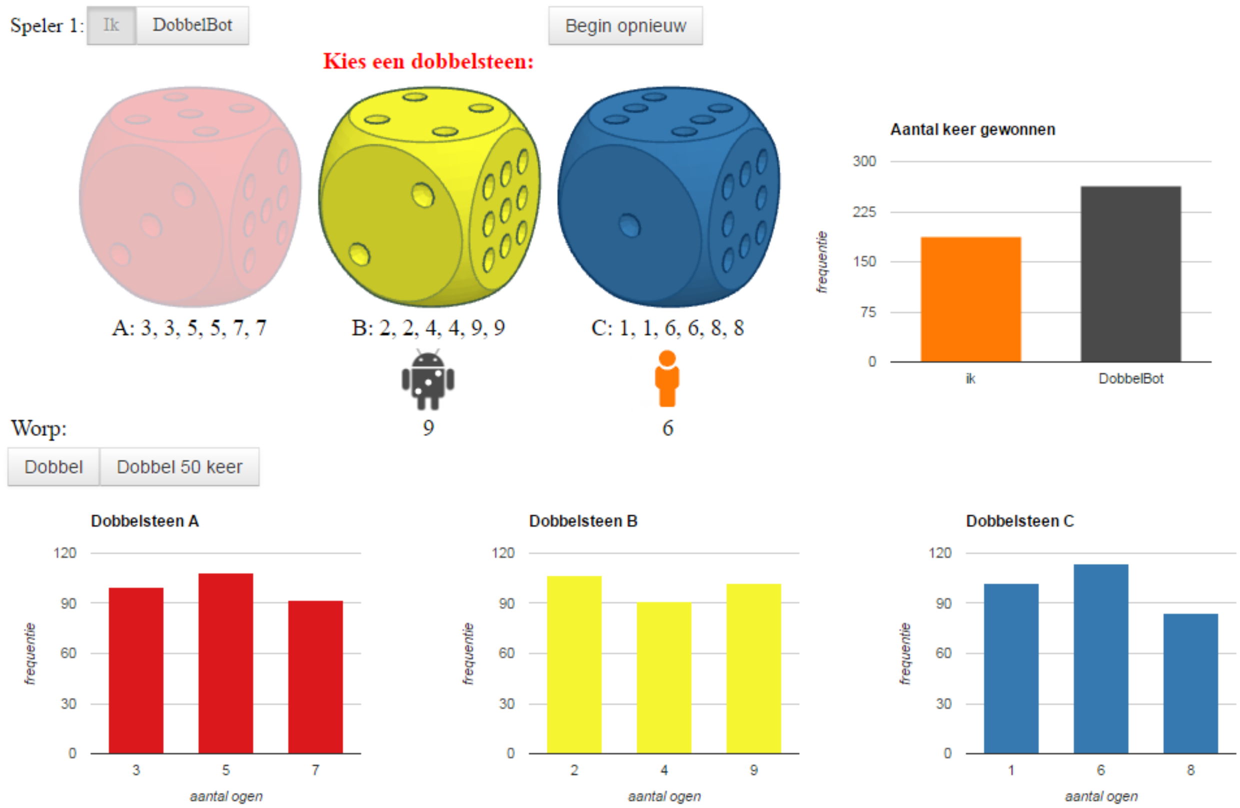


Abbildung 1: DobbelBot nach mehreren Durchgängen des Spiels. Währenddessen wurde ein paar Mal der Würfel gewechselt.

a) Wähle einen Würfel und klicke darauf, um mit ihm zu spielen. DobbelBot wählt danach einen der drei übrig gebliebenen Würfel. Drücke auf den Button "Würfeln".

Du siehst nun, wie viele Augen du gewürfelt hast und wie viele Augen DobbelBot gewürfelt hat. In den drei Diagrammen unten werden die Ergebnisse aller Durchgänge dargestellt. Im Diagramm rechts oben wird dargestellt, wie oft du gewonnen hast (d.h. die höchste Augenzahl gewürfelt hast) und wie oft DobbelBot gewonnen hat.

b) Spiele nun mindestens 300mal gegen DobbelBot. Wechsle während des Spiels mehrmals den Würfel.

Die Wahrscheinlichkeit ist groß, dass DobbelBot besser gewürfelt hat als ihr. Das erkennt ihr im Stabdiagramm rechts oben.

c) Wähle DobbelBot als Spieler 1 und drücke auf OK. Wähle deinen Würfel so, dass du nun häufiger gewinnst als DobbelBot.

d) Gibt es einen Würfel, den man am besten wählen kann, wenn man Spieler 1 ist? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 4 (Gewinnchancen)

Wie oft gewinnt der Würfel A gegen B? In dieser Aufgabe lernst du etwas über die Gewinnchancen eines Würfels in Bezug auf andere Würfel.

Wir beginnen mit den Würfeln aus der Simulation mit DobbelBot. Hier unten seht ihr eine Tabelle, in die man eintragen kann, in welchen Fällen der Würfel A gegen Würfel B gewinnt und umgekehrt. Ein Teil dieser Tabelle ist schon ausgefüllt.

Tabelle 2: Wer gewinnt?

		A					
		3	3	5	5	7	7
B	2	A	A				
	2	A					
	4	B					
	4					A	
	9						
	9		B				

a) Vervollständige die oben stehende Tabelle.

Für die **Gewinnchance** von Würfel A beim Spielen gegen Würfel B verwenden wir die Schreibweise $w(A,B)$. Die Gewinnchance $w(A,B)$ ist gleich $\frac{\textit{Anzahl der Ergebnisse bei denen A gegen B gewinnt}}{\textit{Gesamtzahl an Ergebnissen}}$.

b) Gib $w(A,B)$ und $w(B,A)$ an.

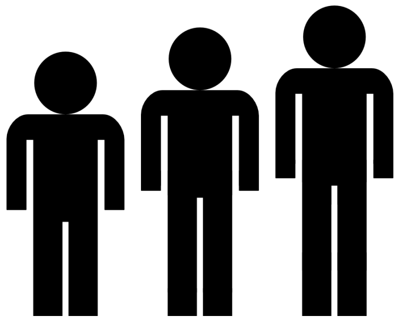
c) Berechne auch $w(B,C)$ und $w(C,A)$ mit Hilfe einer Tabelle.

Wir nennen einen Würfel A **stärker** als einen Würfel B, wenn $w(A,B) > w(B,A)$. Wir notieren dies in der Schreibweise $A \to B$.

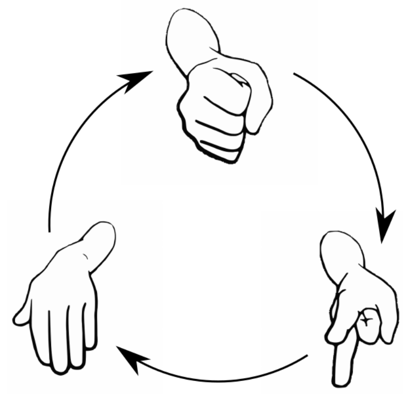
d) Gibt es beim Spiel DobbelBot einen Würfel, der stärker ist als die anderen beiden Würfel? Deckt sich das mit deinen Beobachtungen bei der Simulation?

Du kannst beim Spiel DobbelBot zu jedem Würfel einen anderen Würfel finden, der stärker ist. Das ist ein erstaunliches Paradox! Diese Sorte von Würfelsets werden wir heute untersuchen.

In einem **Schwindelset** ist die Wahl jedes Würfels attraktiv, weil jeder Würfel stärker ist als einer oder (noch besser) mehrere der anderen Würfel. Aber jeder Würfel muss auch wieder schwächer sein als mindestens ein anderer Würfel in dem Set. Das ist genau die Tatsache, die man benötigt, um als zweiter Spieler im Vorteil zu sein.



(a) Bei Längen gibt es keine Zykel.



(b) Bei Stein-Schere-Papier schon.

Abbildung 2: Was ist ein Zykel?

In einem Schwindelset kann man immer mindestens einen Kreis von Würfeln angeben, in dem einer jeweils stärker ist als der andere. Den Beweis dafür könnt ihr als Extraaufgabe 16 erbringen. Falls es sich um einen Kreis von drei Würfeln A, B und C handelt, dann hat man z.B. $C \to A$, $A \to B$, $B \to C$. Wir nennen einen solchen Kreis von drei oder mehr Würfeln einen **Zykel**.

Wenn du das Spiel *Stein-Schere-Papier* kennst, dann weißt du, dass Stein, Schere und Papier auch eine Art Kreis oder besser Zykel formen: Bei jeder Wahl gibt es eine Antwort, die stärker ist. Zusammen bilden sie einen Kreis.

Es ist natürlich klar, dass du mit einem Schwindelset deine Mitschüler ganz schön hinters Licht führen kannst. Mit etwas Glück kannst du damit dein Taschengeld aufbessern. Daher der Name "Schwindel".

Aufgabe 5 (Noch ein Schwindelset)

Es gibt noch mehr Schwindelsets. Wir betrachten die folgenden drei Würfel:

- $D : 1, 1, 7, 7, 8, 8$
- $E : 2, 2, 3, 3, 9, 9$
- $F : 4, 4, 5, 5, 6, 6$

a) Berechne die Gewinnchancen der beteiligten Würfel in jeder möglichen Spielkombination von zwei Würfeln und weise nach, dass es sich hierbei um ein Schwindelset handelt.

Susanne und Robert würfeln wieder.

b) Robert muss als Erster wählen und denkt gut darüber nach. Er entscheidet sich schließlich für Würfel D. Begründe seine Wahl.

Aufgabe 6 (Tabellen und Diagramme bei Würfeln)

Schau dir die beiden Würfel $K : 1, 1, 3, 5, 5, 6$ und $L : 2, 2, 2, 4, 5, 6$ an. Wenn du damit würfelst, dann kann sich dabei auch ein Unentschieden ergeben. Wir tragen hierfür ein G wie Gleichstand in der Tabelle ein.

Tabelle 3: Würfel K und L: Wer gewinnt?

		K					
		1	1	3	5	5	6
	2	L	L	K	K	K	K
	2	L	L	K	K	K	K
L	2	L	L	K	K	K	K
	4	L	L	L	K	K	K
	5	L	L	L	G	G	K
	6	L	L	L	L	L	G

Man erkennt schnell, dass $w(K,L) + w(L,K) < 1$.

a) Wir betrachten nun zwei Würfel mit der folgenden Eigenschaft: Falls eine Augenzahl auf Würfel A vorkommt, kommt sie nicht auf Würfel B vor. Erkläre, dass dann gilt $w(A,B) + w(B,A) = 1$.

Eine Tabelle anzufertigen, kann viel Arbeit sein. Ihr könnt, wenn ihr möchtet, eine Excel-Datei herunterladen, mit der man schneller zwei sechsseitige Würfel miteinander vergleichen kann. Ihr könnt bei Bedarf selbst diese Datei verändern oder erweitern für mehr Würfel oder für Würfel mit mehr oder weniger Seiten.

`http://www.fisme.science.uu.nl/wisbdag/opdrachten/dobbelen/tabel.xlsx`
(verkort adres: `http://bit.ly/2fKtnaF`,oder benutze den folgenden QR Code)

Wir fügen nun den Würfel $M : 1, 2, 3, 4, 5, 6$ hinzu.

b) Zeige mit Hilfe von Tabellen, dass dieses Würfelset K, L und M kein Schwindelset ist.

Aufgabe 7 (Ein Set mit vier Würfeln)

Susanne ist auf den Geschmack gekommen und bringt nun ein Set mit vier Würfeln mit. Robert soll als Erster einen Würfel wählen.

- $W : 1, 1, 1, 5, 5, 5$
- $X : 2, 2, 2, 2, 6, 6$
- $Y : 0, 0, 4, 4, 4, 4$
- $Z : 3, 3, 3, 3, 3, 3$

a) Was ist die Augensumme von jedem dieser Würfel? Erwartest du daher, dass ein Würfel stärker ist als alle anderen Würfel?

b) Ist $WXYZ$ ein Schwindelset?

Wenn man mehr Würfel hat, kann es auch größere Zykel geben. Bei einem Zykel von vier Würfeln gilt, dass 1 stärker ist als 2, 2 stärker ist als 3, 3 stärker als 4 und 4 wieder stärker als 1.

c) Kannst du in diesem Set einen Zykel von vier Würfeln finden?

d) Wie viele Zykel aus drei Würfeln stecken in diesem Set?

Aufgabe 8 (Schwindelsets vergleichen)

Susanne würfelt wieder gegen Robert. Robert hat vom vorigen Mal gelernt: Susanne muss als Erste einen Würfel wählen. Sie haben beide gut verstanden, dass sie auf die Gewinnchancen achten müssen und haben diese ausgerechnet. Angenommen, Susanne darf aber noch wählen, mit welchem Set sie spielen möchte: ABC (Aufgabe 4), DEF (Aufgabe 5) oder $WXYZ$ (Aufgabe 7).

a) Welches Set sollte Susanne am besten wählen?

Angenommen, Robert darf doch wählen, welches Set benutzt werden soll (aber Susanne wählt noch immer den ersten Würfel).

b) Welches Set sollte er wählen?

Aufgabe 9 (Vielseitige Würfel)

Nachdem Robert viele Male gegen Susanne verloren hat, probiert er es mal auf eine andere Weise. Würfel sind nicht alle sechsseitig. Es gibt z. B. auch vierseitige, achtseitige, zwölfseitige und zwanzigseitige Würfel. Und mit Prismen kann man sogar sieben- oder dreizehnseitige Würfel bauen!

Abbildung 3: Vielseitige Würfel

Um Susanne zu verwirren, hat Robert sich ein besonders ausgefallenes Set von Würfeln ausgedacht:

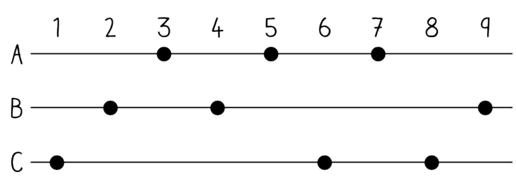
- $Q : 3, 3, 6$
- $R : 2, 2, 5, 5$
- $S : 1, 4, 4, 4, 4$

Handelt es sich hierbei um ein Schwindelset?

Aufgabe 10 (Verschiebungen in Punktdiagrammen)

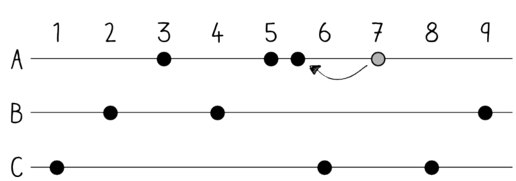
Bislang habt ihr existierende Sets von Würfeln analysiert. Aber wie kann man ein Schwindelset selbst erstellen? In dieser Aufgabe beschreiben wir eine mögliche Herangehensweise. Betrachten wir nochmals die drei Würfel von DobbelBot: $A = 3, 3, 5, 5, 7, 7$; $B = 2, 2, 4, 4, 9, 9$; $C = 1, 1, 6, 6, 8, 8$. Hier unten sind diese drei Würfel auf eine andere Weise dargestellt, nämlich in einem **Punktdiagramm**.

Weil alle Zahlen genau zweimal vorkommen, kann man diese Situation auf dreiseitige Würfel $A = 3, 5, 7$; $B = 2, 4, 9$; $C = 1, 6, 8$ vereinfachen, ohne dass die Gewinnchancen sich verändern.



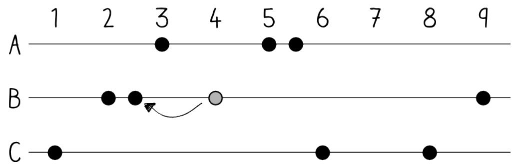
a) Erkläre, wie du mit Hilfe von Punktdiagrammen die Werte für $w(A,B)$ und $w(B,A)$ ausrechnen kannst. (Aufgabe 4b)

Man kann ein Punktdiagramm als Startpunkt sehen. Indem wir die Punkte verschieben, können wir versuchen, die Gewinnchancen zu vergrößern. Zum Beispiel: Beginne mit dem obenstehenden Diagramm und verschiebe bei Würfel A den Punkt bei 7 etwas nach links.

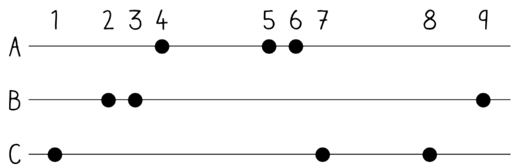


b) Wie groß sind jetzt $w(A,B)$, $w(B,C)$ und $w(C,A)$?

Wir können z.B. noch eine weitere Verschiebung durchführen:



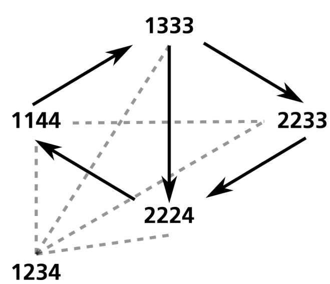
Wenn es dich stört, dass die 2 und die 5 jetzt doppelt vorkommen, dann kannst du auch die Zahlen etwas verschieben, z.B. so:



Man erkennt, dass wir durch diese Verschiebungen die Würfel von Aufgabe 5 zurückerhalten haben.

Wir betrachten nun fünf Würfel mit jeweils vier Seiten, bei denen die Augensumme jedes Würfels 10 ist und die Augenzahl pro Seite 1, 2, 3 oder 4 ist. Es gibt genau fünf mögliche Würfel unter diesen Randbedingungen. Wir notieren die Würfel der Einfachheit halber nicht mehr mit einem Buchstaben, sondern mit den Augenzahlen ohne Komma dazwischen: 1234, 1333, 2233, 2224 und 1144. Ist dieses Set von Würfeln ein Schwindelset?

Auf die folgende Art und Weise kann man eine grafische Darstellung erstellen, die die Stärke der Würfel in Bezug zueinander deutlich macht:



Wir notieren die Namen der Würfel verteilt auf einem Blatt. Dann zeichnen wir einen Pfeil von Würfel A zu Würfel B, falls $A \to B$ (Erinnerung: d.h. dass Würfel A stärker ist als Würfel B oder $w(A,B) > w(B,A)$). Wir zeichnen eine gestrichelte Linie, falls $w(A,B) = w(B,A)$. Eine solche Darstellung heißt **Graph**. Bei dem Graph eines Schwindelsets geht von jedem Würfel ein Pfeil aus und es kommt bei jedem Würfel ein Pfeil an.
Man kann in dem Graphen sehr leicht Zykel erkennen. Es gibt einen Zykel von drei Würfeln und einen von vier!

Es gibt keine Pfeile von und zu Würfel 1234. Dieser Würfel ist **neutral**. Hierdurch handelt es sich bei diesem Set um kein Schwindelset. Lässt man diesen neutralen Würfel weg, dann erhält man allerdings ein Schwindelset.

Aufgabe 11 (Der Graph eines Würfelsets)

Zeichne den Graph zu den Würfeln aus Aufgabe 7.

Aufgabe 12 (Algebraisch würfeln)

Die Würfel

- $G : 1,4,4$
- $H : 3,3,3$
- $I : 2,2,5$

bilden ein Schwindelset. Die Wahrscheinlichkeiten sind $w(G,H) = \frac{2}{3}$, $w(H,I) = \frac{2}{3}$ und $w(I,G) = \frac{5}{9}$.

Robert will das Set so anpassen, dass die kleinste Wahrscheinlichkeit ($\frac{5}{9}$) etwas größer wird. Hierzu erhöht er die Anzahl der Seiten auf 21. Würfel G hat n Einsen und $21-n$ Vieren: $G : 1,1,\dots,1,4,4,\dots,4$. Würfel H besteht aus 21 Dreien, $H : 3,3,\dots,3$. Würfel I hat n Fünfen und $21 - n$ Zweien. Wenn beispielsweise $n = 3$ ist, so erhält man das Set $G : 1,1,1,4,4,\dots,4,4$, $H : 3,3,3,3,\dots,3,3,3,3$ und $I : 2,2,\dots,2,2,5,5,5$.

a) Drücke die Gewinnchancen $w(G,H)$, $w(H,I)$ und $w(I,G)$ mit Hilfe von n aus.

Zwei der drei Wahrscheinlichkeiten sind gleich.

b) Wie sollte Robert die Zahl n wählen, so dass die kleinste der Wahrscheinlichkeiten $w(G,H)$, $w(H,I)$ und $w(I,G)$ so groß wie möglich wird?

c) Und wie sieht das bei einem dreißigseitigen Würfel aus?

Extraaufgaben

Diese Extraaufgaben sind nicht verpflichtend und nicht notwendig für die Abschlussaufgabe. Allerdings können hieraus gute Ideen entstehen und das Verständnis von Schwindelsets erweitert werden. Macht diese Extraaufgaben nur dann, wenn ihr vormittags noch genügend Zeit übrig habt.

Aufgabe 13 (Extraübung: ein spezieller Graph)

Angenommen, du hast die folgenden fünf sechsseitigen Würfel: 222777, 116666, 055555, 444449, 333388. Dieses Set hat einige besondere Eigenschaften.

a) Zeichne einen Graph zu diesen fünf Würfeln.

b) Erstelle eine Übersicht aller Zykel in diesem Graph.

Aufgabe 14 (Der neutrale Würfel)

Wir betrachten nun ausschließlich sechsseitige Würfel, bei denen die Augensumme 21 ist und die Augenzahl pro Seite 1, 2, 3, 4, 5 oder 6 ist. Ein Beispiel ist der ‚gewöhnliche' Würfel $O : 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

a) Denk dir noch einige andere Würfel A mit der Augensumme 21 aus und berechne jeweils $w(A,O)$ und $w(O,A)$.

Genauso wie 1234 neutral war im Vergleich zu den Würfeln mit der Augensumme 10, so ist O neutral im Vergleich zu Würfeln mit der Augensumme 21.

b) Beweise dies, d.h. zeige, dass $w(O,A) = w(A,O)$ für jeden Würfel A mit Augensumme 21.

Falls A nicht notwendigerweise eine Augensumme von 21 hat, aber dennoch ausschließlich die Augenzahlen 1, 2, 3, 4, 5 oder 6, dann gibt es ein allgemeineres Resultat.

c) Beweise, dass $w(A,O) = \frac{Augensumme(A)-6}{36}$ und $w(O,A) = \frac{36-Augensumme(A)}{36}$.

d) Zeige auf diese Art und Weise eine noch allgemeinere Aussage für die Würfel mit den Augen $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ für eine positive ganze Zahl n.

Aufgabe 15 (Duale Würfel)

Wir betrachten nun fünfseitige Würfel, bei denen die Augensumme 15 ist und bei denen die Augenzahlen 1, 2, 3, 4 oder 5 sind, z.B. 12255.

a) Gib alle möglichen Würfel dieser Sorte an.

Jeder solche Würfel A hat einen **dualen Würfel** A^*. Die Augenzahlen von A^* erhält man, indem man die Augenzahlen von A jeweils von der Zahl 6 subtrahiert. Z.B. ist der duale Würfel von 12255 der Würfel mit den Augenzahlen 6-5, 6-5, 6-2, 6-2, 6-1, also 11445.

b) Erkläre, dass für jeden solchen Würfel A die Augensumme des dualen Würfels A^* auch wieder 15 ist.

c) Beweise dass $w(A,B) = w(B^*,A^*)$.

Ein Würfel A ist **selbstdual**, falls $A = A^*$.

d) Beweise, dass für zwei selbstduale Würfel A und B gilt $w(A,B) = w(B,A)$

e) Angenommen, A ist selbstdual. Beweise: Falls $w(B,A) > w(A,B)$, dann ist $w(B^*,A) < w(A,B^*)$

Aufgabe 16 (Zykel)

Beweise, dass jedes Schwindelset einen Zykel hat.

Aufgabe 17 (Eine Obergrenze für die Summe der Wahrscheinlichkeiten)

Angenommen, die Würfel A, B und C bilden einen Zykel $A \to B$, $B \to C$, $C \to A$, dann haben wir jeweils die Gewinnwahrscheinlichkeiten $w(A,B)$, $w(B,C)$ und $w(C,A)$ ausgerechnet. Die Wahrscheinlichkeiten sind insbesondere jeweils ≤ 1. Können die Wahrscheinlichkeiten alle drei gleich 1 sein? Oder gibt es eine Grenze? In dieser Aufgabe werdet ihr beweisen, dass

$$w(A,B) + w(B,C) + w(C,A) \leq 2$$

.

Wenn man die Gewinnwahrscheinlichkeiten ausrechnen will, dann vergleicht man die Seiten der Würfel, z.B. mit Hilfe einer Tabelle. Um hiermit argumentieren zu können, einigen wir uns zunächst auf ein paar Schreibweisen. Wir gehen davon aus, dass alle drei Würfel sechs Seiten haben. Die Augenzahlen auf den Seiten von A notieren wir mit $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_6$. Zum Beispiel ist in Aufgabe 4 $A_1 = 3, A_2 = 3, A_3 = 5, A_4 = 5, A_5 = 7$ und $A_6 = 7$. Wir verwenden dieselbe Schreibweise für die Augenzahlen auf den Seiten der Würfel B und C; z.B. $B_5 = 9$.

Wir schreiben $A_1B_2 = 1$, falls die Augenzahl auf der ersten Seite von A größer ist als die Augenzahl auf der zweiten Seite von B, (d.h. falls $A_1 > B_2$), und $A_1B_2 = 0$, falls das nicht so ist (falls $A_1 \leq B_2$). Genauso und allgemeiner verfahren wir für $1 \leq i,j \leq 6$.

a) Erkläre, dass A_1B_1, B_1C_1 und C_1A_1 nicht alle gleich 1 sein können.

b) Verallgemeinere: Erkläre, dass A_iB_j, B_jC_k und C_kA_i nicht alle gleich 1 sein können (für $1 \leq i,j,k \leq 6$).

c) Erkläre, dass

$$w(A,B) = \frac{A_1B_1 + A_1B_2 + \ldots + A_6B_5 + A_6B_6}{36}.$$

d) Zeige, dass die Summe mit 216×3 Termen

$$\begin{aligned}
&A_1B_1 + B_1C_1 + C_1A_1 \\
&+A_1B_1 + B_1C_2 + C_2A_1 \\
&+A_1B_1 + B_1C_3 + C_3A_1 \\
&+\dots \\
&+A_6B_6 + B_6C_5 + C_5A_6 \\
&+A_6B_6 + B_6C_6 + C_6A_6
\end{aligned}$$

gleich ist zu

$$216(w(A,B) + w(B,C) + w(C,A)).$$

e) Erläutere, dass aus dem Vorhergehenden folgt, dass

$$w(A,B) + w(B,C) + w(C,A) \leq 2.$$

f) Formuliere eine Verallgemeinerung des Resultats für eine beliebige Anzahl von Würfeln mit einer beliebigen Anzahl von Seiten. Dies muss nicht bewiesen werden.

Abschlussaufgabe - Schwindelsets

Die Abschlussaufgabe des Mathematik-B-Tags 2016 besteht darin, dass deine Gruppe ein Schwindelset aus Würfeln erstellt. Wir geben euch dazu drei Bedingungen, wobei die Bedingungen 1 und 2 wichtiger als Bedingung 3 sind. Erstelle eine Schwindelset, dass so weit möglich diese Bedingungen erfüllt.

Bedingungen:

1. Sorge dafür, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der Spieler 2 gewinnt, so groß wie möglich wird. Gehe davon aus, dass Spieler 1 alle Wahrscheinlichkeiten durchgerechnet hat und schlau spielt.

2. Versuche zu erreichen, dass das Set einen großen Zykel besitzt.

3. Gestalte das Set so, dass es mehrere Zykel hat.

Erklärung zu Bedingung 1: Du willst ein gutes Set erstellen für den Fall, dass Spieler 1 (der den ersten Würfel wählt) schlau spielt (er wählt dann den Würfel mit der für dich geringsten Gewinnwahrscheinlichkeit). Die geringste Gewinnwahrscheinlichkeit muss also so groß wie möglich sein.