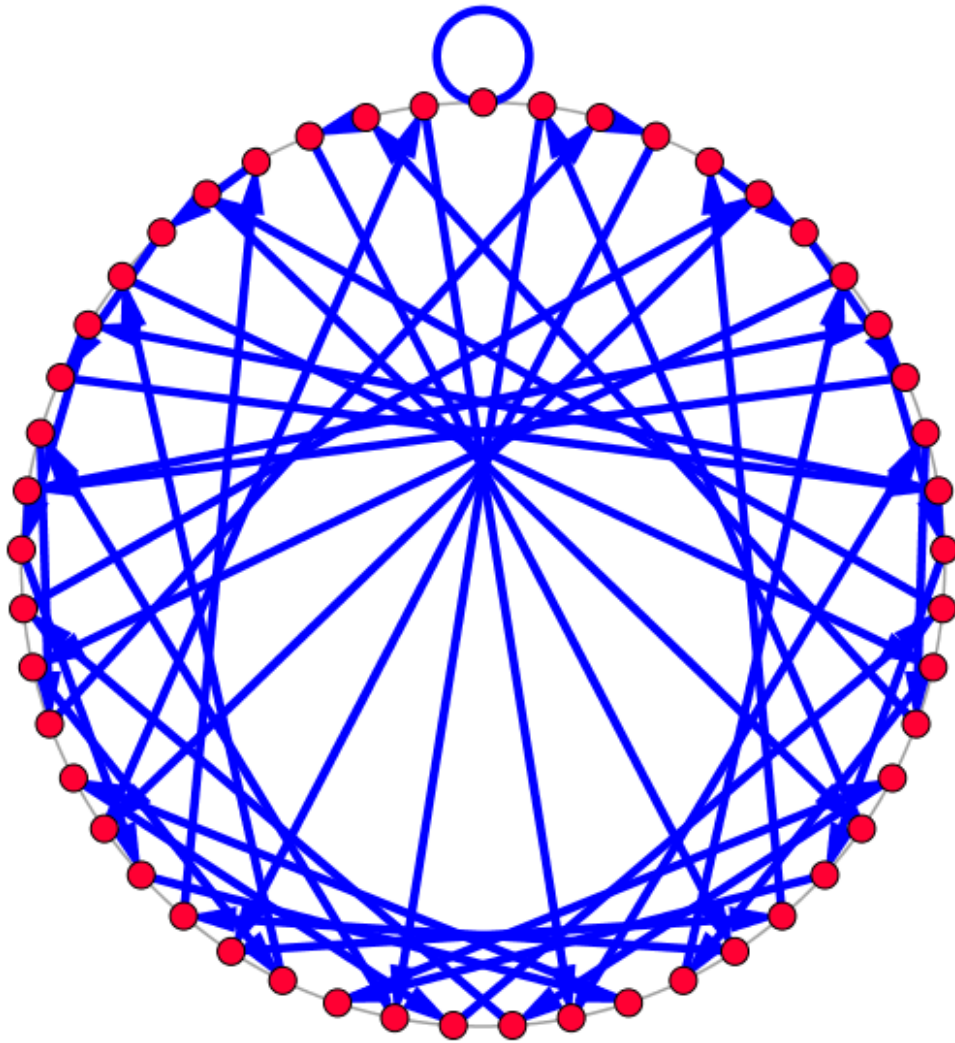


Pfeiluhren



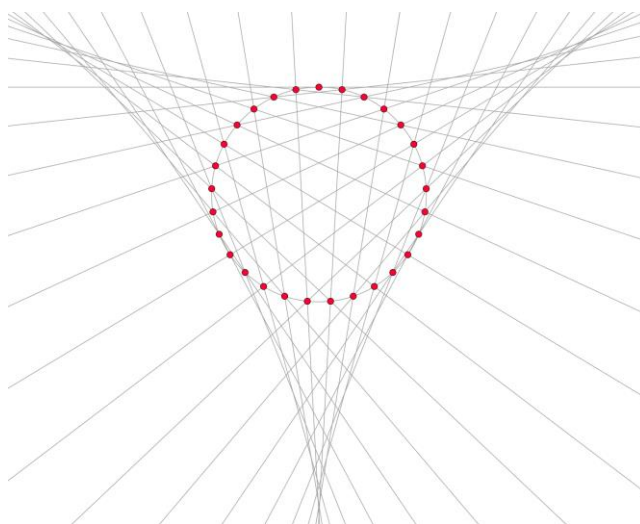
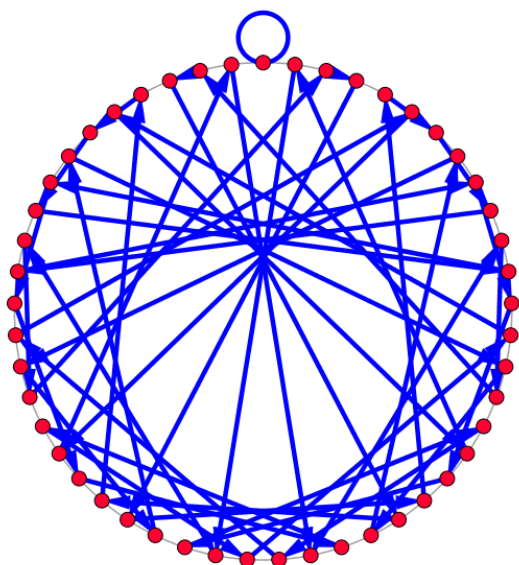
Mathematik B-Tag

Freitag 24. November 2017, 8.00 – 15.00 Uhr

Einleitung

Über die Aufgaben

Menschen sind von Natur aus stark im Erkennen von Mustern und Strukturen. In der Mathematik betreiben sie dies sogar als Sport. Die heutigen Aufgaben leiten euch von einfachen Vorschriften zu prachtvollen Bildern, die wir Pfeil- und Geradenuhren nennen.



Eure Herausforderung wird sein, die dahinterliegenden Muster und Strukturen zu entdecken.

Tagesablauf

Die Mathematik B-Tag Aufgaben bestehen aus acht Basisaufgaben, einer Zusatzaufgabe und einer Abschlussaufgabe. Versucht, die Hälfte der Zeit mit der Abschlussaufgabe zu verbringen. Es handelt sich bei der Abschlussaufgabe um einen Forschungsauftrag. Geht auf Entdeckungsreise, experimentiert, stellt Fragen, entdeckt Regelmäßigkeiten. Jeder (oder jede Gruppe) kann seinen ganz eigenen Weg einschlagen.

Die gesamte Arbeit muss um 15 Uhr eingereicht werden. Teilt euch die Zeit sorgfältig ein und teilt die Aufgaben sorgfältig auf. Es könnte sinnvoll sein, schon morgens mit dem Aufschreiben eurer Lösungen der Basisaufgaben zu beginnen.

Was müsst ihr abgeben?

Am Ende des Tages gebt ihr einen digitalen Bericht eurer Arbeit ab. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt und insbesondere die Ergebnisse eurer Erforschung der Abschlussaufgabe. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als ein Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule nicht in eurer Arbeit.

Tipps:

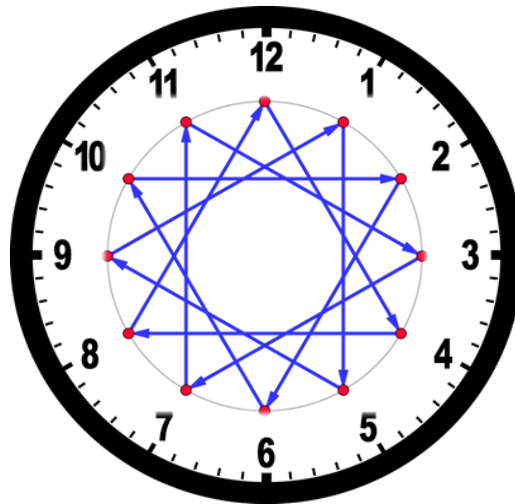
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht), euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass ihr eure Antworten ausschreiben müsst und nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn Ihr argumentiert, erklärt oder etwas begründet, versucht dies möglichst *mit mathematischen Argumenten* zu tun. Eine Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit ist anzustreben!
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet beispielsweise Screenshots oder Zirkel und Lineal.
- Erstellt einen Plan und verteilt die Aufgaben in eurer Gruppe.

Neben dem mathematischen Inhalt eurer Arbeit wird auch die Qualität der Darstellung bewertet.

Basisaufgaben

Aufgabe 1: Uhr

Hier seht ihr eine Uhr mit zwölf (roten) Punkten bei den Zahlen. Es führt ein Pfeil von jeder vollen Stunde zur Zahl vier Stunden später.

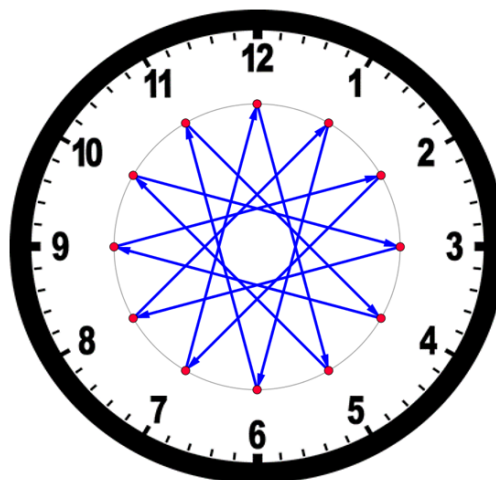


Wir sehen vier gleichseitige Dreiecke mit den oben genannten (roten) Punkten als Ecken.

- (a) Erstellt eine gleichartige Abbildung, wobei die Pfeile immer 9 Stunden vorauszeigen. Was fällt auf?

Wir nennen solche Abbildungen *Pfeiluhren*. Hier haben wir uns Pfeiluhren angesehen, bei denen die Pfeile 4, bzw. 9 Stunden vorauszeigen. In beiden Fällen bilden die blauen Pfeile Vielecke mit den roten Punkten als Ecken. Wie sähen die Pfeiluhren aus, wenn die Pfeile immer b Stunden vorauszeigen mit $b = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, 10$ oder 11?

Für $b = 5$ erhaltet Ihr die folgende Abbildung:



Die Pfeile bilden noch immer ein Vieleck: ein sternförmiges Zwölfeck.

- (b) Untersucht, welche Arten von Vielecken man bei verschiedenen Werten für b (1 bis 11) erhält und wie viele dieser Vielecke es dann jeweils sind.

Auf einem anderen Planeten besitzen die Uhren 15 statt 12 Stunden. Für diese Uhren können wir uns die gleichen Fragen wie in Aufgabenteil (b) stellen: Bei welchen Werten für b bilden die Pfeile mehrere Vielecke? Der größte gemeinsame Teiler von b und 15 spielt hier eine Rolle.

- (c) Erklärt dies.
- (d) Überlegt euch eine Uhr (nicht mit 12 oder 15 Stunden), die bei allen Werten für b nur ein einziges Vieleck liefert.

Modulo rechnen

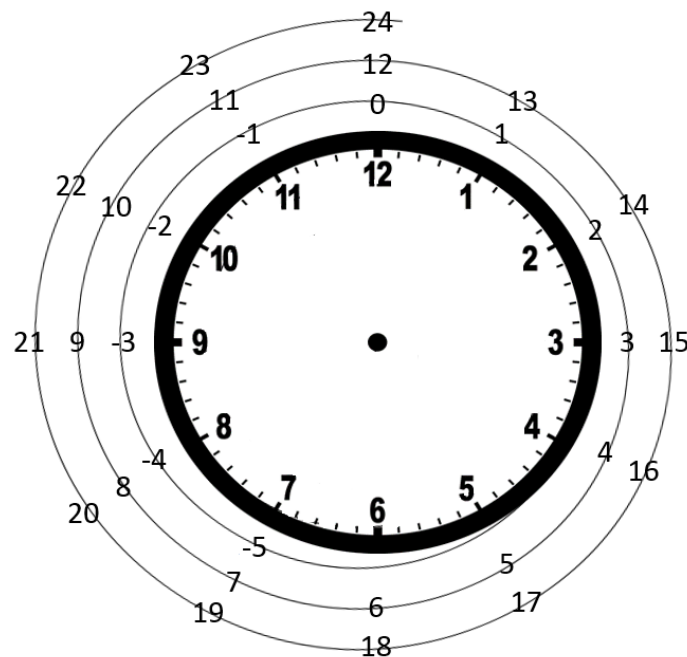
In obiger Abbildung der 12-Stunden-Uhr sind die Pfeile $1 \rightarrow 5$, $2 \rightarrow 6$, $3 \rightarrow 7$, usw. eingezeichnet. Allgemein folgen die Pfeile der Vorschrift:

$$x \rightarrow x + 4,$$

wobei zu beachten ist, dass man nach der 12 wieder bei 1 beginnt. Also: $9 \rightarrow 1$, $10 \rightarrow 2$, usw. Wir schreiben dann auch $13 \equiv 1 \pmod{12}$, $14 \equiv 2 \pmod{12}$ usw.

Und allgemein schreiben wir $a \equiv b \pmod{12}$, wenn die Differenz von a und b ein Vielfaches von 12 ist. Zum Beispiel gilt $38 \equiv 14 \pmod{12}$ und $100 \equiv 28 \pmod{12}$, aber auch $7 \equiv -5 \pmod{12}$ und $-11 \equiv 49 \pmod{12}$.

Man kann sich auch vorstellen, dass man den Zahlenstrahl um die Uhr wickelt. Die Zahlen -17, -5, 7, 19, 31, und so weiter liegen dann alle auf der 7 und sind demnach Modulo 12 dasselbe.



“mod” steht für “Modulo” und das Rechnen damit bezeichnen wir als *Modulo rechnen*.

Die Summe $92 + 74 \pmod{12}$ kann man wie folgt ermitteln: $92 \equiv 8 \pmod{12}$ und $74 \equiv 2 \pmod{12}$. Daher gilt: $92 + 74 \equiv 8 + 2 \equiv 10 \pmod{12}$. Das funktioniert auch beim Multiplizieren:

$$92 \cdot 74 \equiv 8 \cdot 2 \equiv 16 \equiv 4 \pmod{12}.$$

Achtung: Beim Teilen klappt es meistens nicht!

Natürlich kann man auch mit anderen Zahlen als mit 12 Modulo rechnen.

Aufgabe 2: Vielecksgleichung

In Aufgabe 1 habt Ihr Vorschriften der Form $x \rightarrow x + b$ untersucht, wobei b eine ganze Zahl ist. Im Falle gleichseitiger Dreiecke ($x \rightarrow x + b \rightarrow x + 2b \rightarrow x + 3b$) muss der letzte Pfeil wieder beim Anfang landen und daher $x + 3b \equiv x \pmod{12}$ gelten. Zieht man auf beiden Seiten der Gleichung x ab, erhält man folgende *Vielecksgleichung*: $3b \equiv 0 \pmod{12}$.

Diese Gleichung kann man wie folgt lösen: $3b \equiv 0 \pmod{12}$ bedeutet, dass sich $3b$ und 0 um ein Vielfaches von 12 voneinander unterscheiden. Man kann also

$$3b = 0 + 12k$$

schreiben, wobei k eine ganze Zahl ist. Teilen durch 3 liefert

$$b = 4k.$$

Somit ist b ein Vielfaches von 4, oder auch

$$b = \dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots$$

Schlussfolgerung: Bei diesen Werten für b erhält man ein gleichseitiges Dreieck, außer für 0.

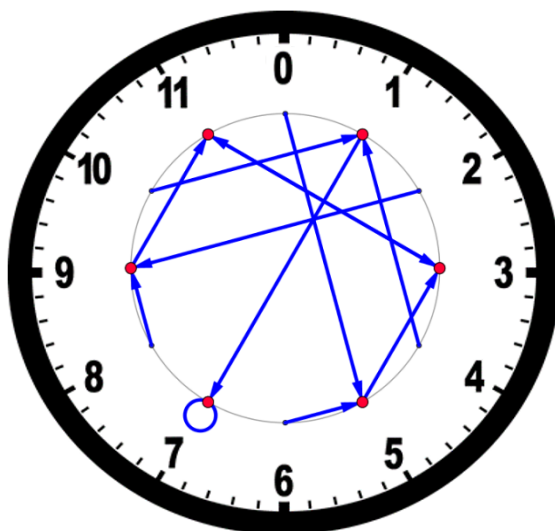
- (a) Woran liegt das? Warum erhält man auch $b = 0$ als Lösung, obwohl man in dem Fall gar kein gleichseitiges Dreieck sieht?

Man kann auf gleiche Art und Weise untersuchen, für welche b die Vorschrift $x \rightarrow x + b$ regelmäßige Fünfecke auf einer Uhr mit 15 Stunden entstehen lässt.

- (b) Bestimmt die zugehörige Vielecksgleichung. Erklärt, wie ihr sie gefunden habt, und zeigt, wie man sie lösen kann.

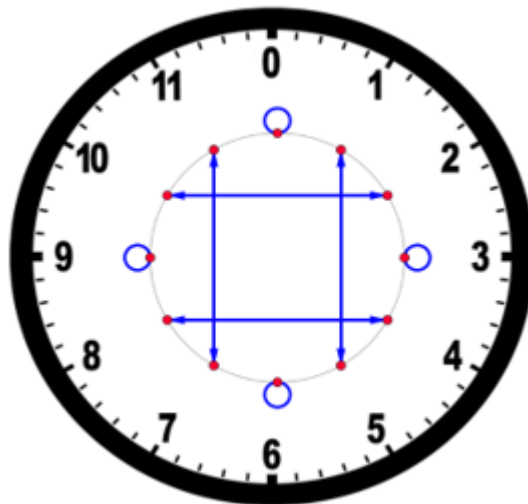
Aufgabe 3: Vorschriften

Wir betrachten nun eine größere Klasse von Vorschriften, darunter zum Beispiel $x \rightarrow 2x + 5$. Beachtet, dass $12 \equiv 0 \pmod{12}$. Man kann daher auch eine 0 oben auf die Uhr schreiben.



Die Schlaufe bei 7 bedeutet, dass die Zahl mit sich selbst verbunden wird.

- (a) Zeichnet die Pfeiluhr zur Vorschrift $x \rightarrow 3x + 2$ auf einer 12-Stunden-Uhr.



- (b) Gebt eine Vorschrift $x \rightarrow \dots$, für die oben stehende Pfeiluhr an.

Dreht die Pfeile auf der Uhr jetzt um 60° im Uhrzeigersinn.

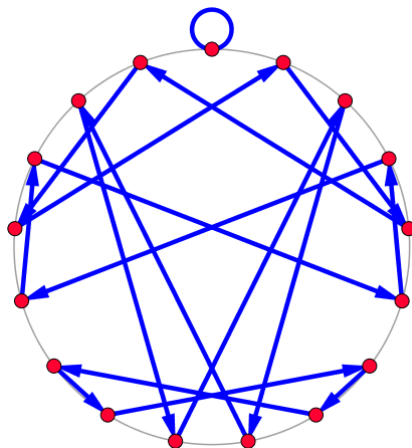
- (c) Welche Vorschrift gehört zu der dadurch entstandenen Pfeiluhr?

Beim heutigen Mathematik B-Tag geht es um Pfeiluhren wie sie in den vorigen Aufgaben behandelt wurden.

Bis jetzt haben wir nur Pfeiluhren mit 12 oder 15 Stunden betrachtet, aber wir möchten uns nicht weiter darauf beschränken und bezeichnen mit n die Anzahl der Stunden auf der Uhr.

Aufgabe 4: Zielpunkte

Nachfolgend seht ihr eine schöne symmetrische Pfeiluhr mit $n = 17$. Ab sofort lassen wir das Ziffernblatt weg. Die Vorschrift lautet hier: $x \rightarrow 4x$.



(Rote) Punkte, bei denen ein Pfeil endet, heißen *Zielpunkte*. (Rote) Punkte, bei denen ein Pfeil beginnt, heißen *Startpunkte*.

- (a) Rechnet nach, dass jeder Punkt ein Zielpunkt ist, wenn die Vorschrift $x \rightarrow 4x$ lautet und $n = 17$ ist.

Wann sind Punkte Zielpunkte und wann sind sie das nicht?

- (b) Warum ist 1 kein Zielpunkt bei der Vorschrift $x \rightarrow 2x$ und $n = 12$?
- (c) Wie viele Pfeile kommen in jedem Zielpunkt an, wenn die Vorschrift $x \rightarrow 2x$ ist und $n = 12$?

Bei der Vorschrift $x \rightarrow 4x$ und $n = 15$ ist 1 ein Zielpunkt, denn $4 \rightarrow 1$.

- (d) Benutzt die Tatsache, dass $4 \rightarrow 1$ ein Pfeil ist, um die Startpunkte der Pfeile mit den Zielpunkten 2, 3, 4, ..., 14 auf eine schnelle Weise zu finden.
- (e) Verwendet dieselbe Methode, um bei $x \rightarrow 4x$ und $n = 45$ zu jedem Zielpunkt 1, 2, 3, ..., 44 mittels einer Formel den zugehörigen Startpunkt anzugeben.

Für das spätere Argumentieren ist es hilfreich, ein wenig Zahlentheorie zu Rate zu ziehen.

Zwei Zahlen a und n sind *relativ prim*, wenn 1 die einzige positive Zahl ist, die beide Zahlen teilt. (Anders gesagt: Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen ist 1, also $\text{ggT}(a, n) = 1$).

In dem Fall hat die Gleichung

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

genau eine Lösung modulo n .

In der Zusatzaufgabe könnt Ihr herausfinden, warum das so ist.

Zum Beispiel: 9 und 14 sind relativ prim; die Gleichung $9x \equiv 1 \pmod{14}$ hat $x = 11$ als einzige Lösung modulo 14, denn $9 \cdot 11 = 99 = 1 + 7 \cdot 14 \equiv 1 \pmod{14}$. Betrachtet hierzu die Zusatzaufgabe.

- (f) Löst die folgende Gleichung: $4x \equiv 1 \pmod{9}$.

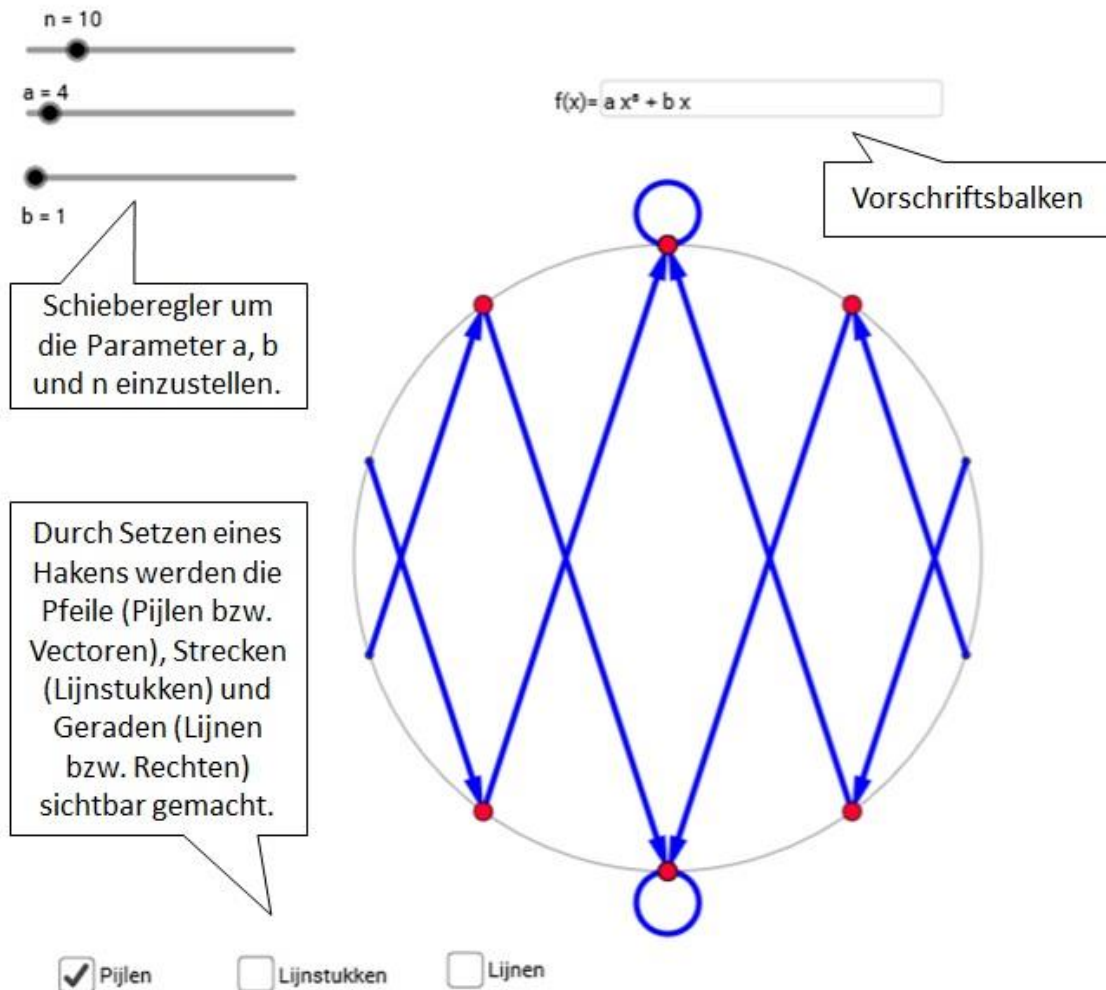
Wir betrachten nun den allgemeinen Fall: Die Vorschrift lautet $x \rightarrow ax$ und die Uhr hat n Stunden.

- (g) Erklärt, wie aus der Aussage in dem Kästchen folgt, dass jede Zahl ein Zielpunkt ist, wenn a und n relativ prim sind.

Aufgabe 5: Geogebra-Applet

Geht in Eurem Browser zu <https://www.geogebra.org/m/ZUDcUk2C>. Dort findet ihr ein Online-Geogebra-Applet mit dem Namen *Pijlenklokken*, mit dem ihr Pfeiluhren für verschiedene Vorschriften untersuchen könnt.

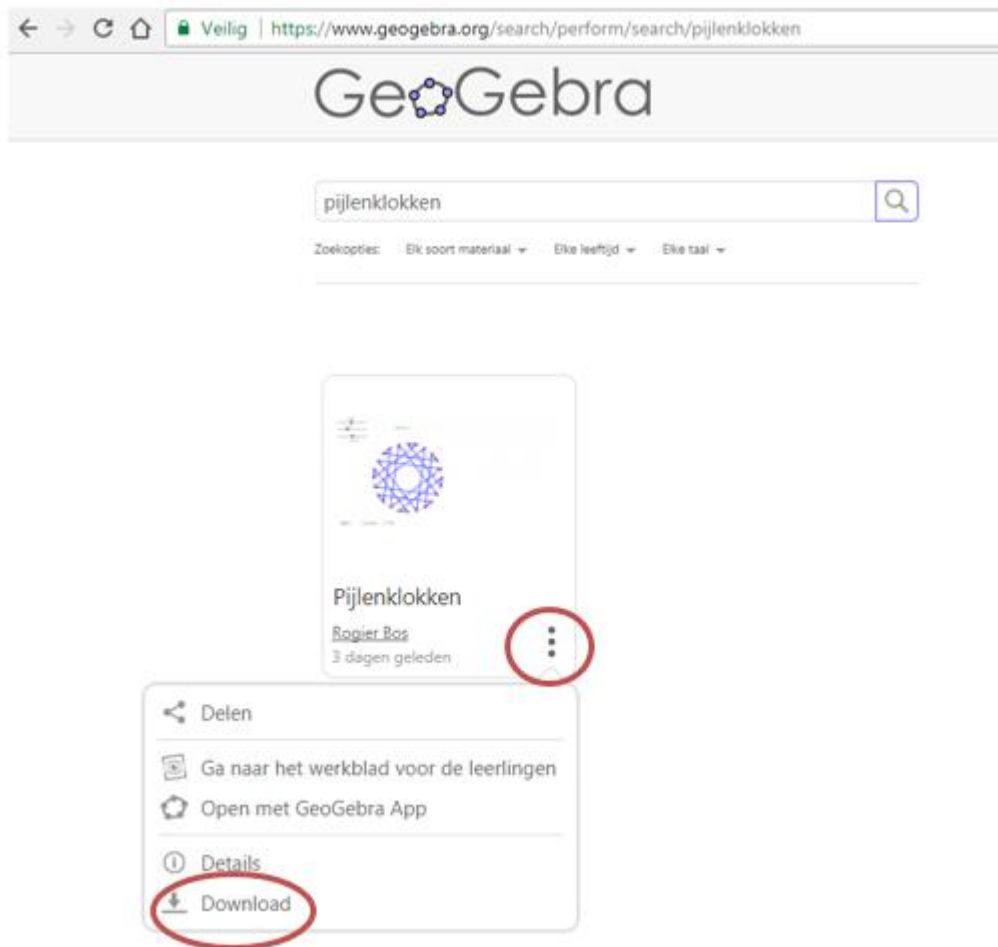
Pijlenklokken



Mit den Schiebereglern links oben könnt ihr die Werte der Parameter variieren. Probiert es einfach mal aus. Links unten könnt Ihr auswählen, ob Ihr die Pfeile (Pijlen oder Vectoren auf Niederländisch) und/oder die Strecken (Lijnstukken auf Niederländisch) zwischen den Punkten und/oder die Geraden (Lijnen oder Rechten auf Niederländisch), die durch die Punkte verlaufen, sehen wollt.

In den Vorschriftsbalken könnt Ihr durch entsprechende Eingaben die Vorschrift variieren. Ihr gebt dazu zum Beispiel x^2 oder $a x^3 + b$ ein. Nachdem ihr *Enter* gedrückt habt, erscheint dann die eingetippte Vorschrift im Vorschriftsbalken. Achtet darauf, dass die Vorschrift ganze Zahlen als Werte annehmen muss. Man kann in der Vorschrift die Parameter a und b verwenden, aber diese müssen von den Variablen getrennt eingegeben werden, also " $a x$ " oder " $a * x$ " und nicht " ax ".

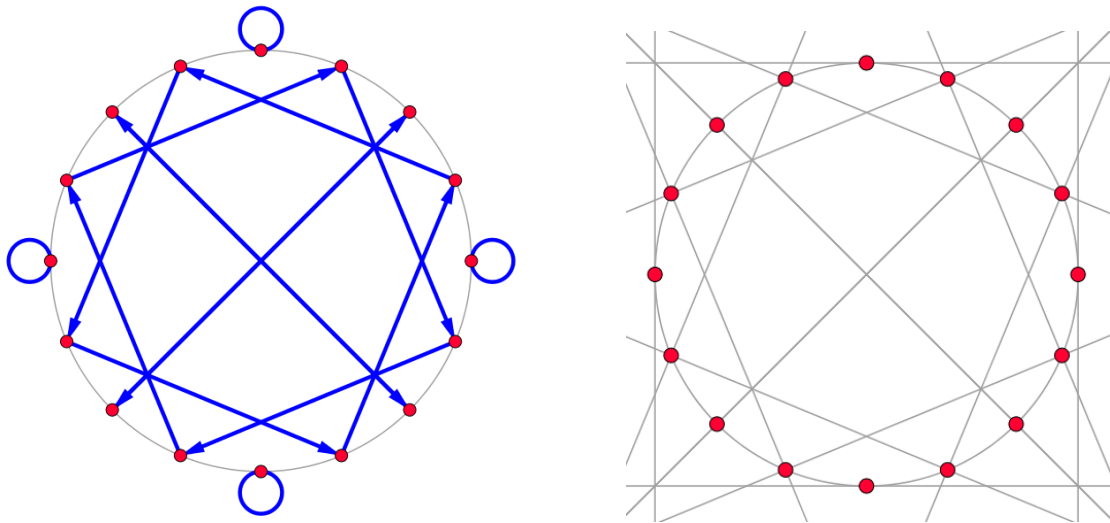
Ihr könnt auch offline mit Geogebra arbeiten, wenn die Software auf Eurem Computer installiert ist. Die .ggb-Datei könnt Ihr auf <https://www.geogebra.org/materials/> herunterladen. Sucht nach "Pijlenklokken".



Klickt auf die drei kleinen Vierecke und dann auf "Download". Ihr könnt die .ggb-Datei dann über Geogebra auf Eurem Computer öffnen. Wahrscheinlich ist sie jetzt in eurem Download-Ordner gespeichert. Wenn Ihr offline arbeitet, könnt Ihr neue Vorschriften nicht einfach in den Vorschriftsbalken eingeben; Ihr müsst dann die Eingabezeile ganz unten verwenden. Eure Vorschrift muss dann stets mit " $f(x)=$ " anfangen.

Aufgabe 6: Geraden

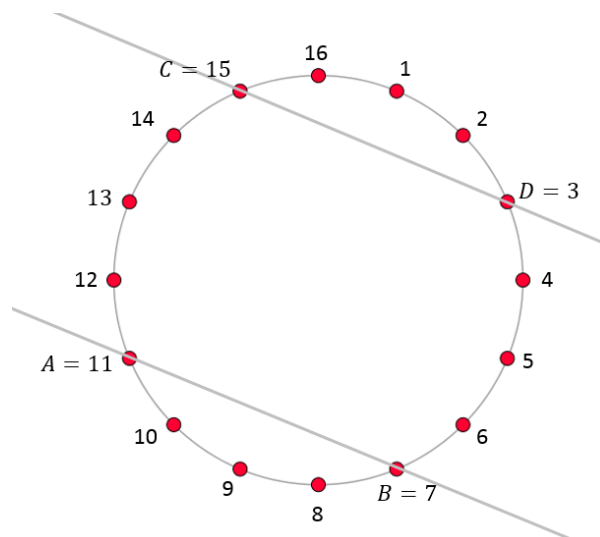
Man kann statt der Pfeile auch Geraden zeichnen lassen. Nachfolgend seht ihr das Ergebnis für die Vorschrift $x \rightarrow 5x$ und $n = 16$. Wir bezeichnen die rechte Figur als *Geradenuhr*.



Anstelle der Schlaufe zeichnen wir eine Tangente an den Kreis (Warum ist das keine dumme Idee?).

Wir sehen viele Paare paralleler Geraden. Wir werden versuchen, dies in der folgenden Aufgabe zu *erklären*.

Schaut Euch die folgende Abbildung an



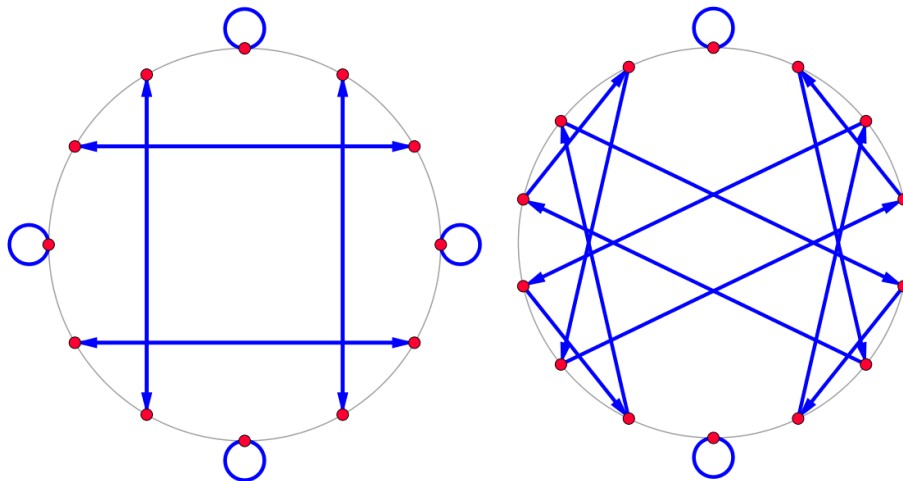
Die Geraden AB und CD sind parallel.

- Wie sieht man an den Zahlen A, B, C, D schnell, dass AB und CD parallel sind? Formeller: Findet eine Gleichung mit den Variablen A, B, C, D , die genau dann gilt, wenn AB und CD parallel sind..
- Wendet euer Ergebnis aus (a) auf die Vorschrift $x \rightarrow 5x$ und $n = 16$ an. Findet man so alle Paare?

- (c) Argumentiert mit Hilfe der Bedingung in (a), bei welchen Werten für n man bei der Vorschrift $x \rightarrow 5x$ parallele Geradenpaare findet.
- (d) Erklärt, warum die Gleichung aus (a) zu parallelen Geraden führt.

Aufgabe 7

In Aufgabe 3 seid Ihr bereits der Pfeiluhr links unten begegnet.

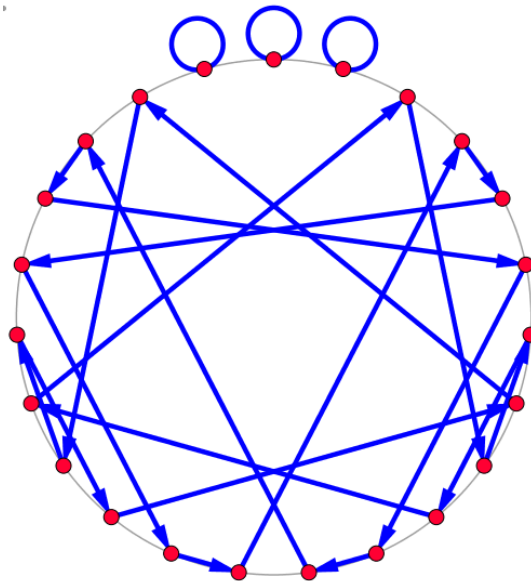


Bei dieser Pfeiluhr sieht man 4 Schlaufen. Bei der rechten Pfeiluhr, die mit derselben Vorschrift gemacht wurde, allerdings mit $n = 14$, sieht man zwei.

- (a) Untersucht Vorschriften der Form $x \rightarrow ax$ und variiert a und n . Findet eine Regel/Formel für die Anzahl der Schlaufen als Funktion von a und n .
- (b) Erklärt diese Regel/Formel.

Aufgabe 8

- (a) Spielt mit verschiedenen Werten von n bei der Vorschrift $x \rightarrow x^3$ und notiert, was Euch auffällt.



Möglicherweise habt Ihr bemerkt, dass die Pfeiluhren allesamt achsensymmetrisch zur vertikalen Gerade durch den Kreismittelpunkt sind.

- (b) Erklärt, warum die Pfeiluhren mit der Vorschrift $x \rightarrow x^3$ für alle Werte von n achsensymmetrisch zu dieser Vertikalen sind.
- (c) Gebt weitere Vorschriften an, bei denen die zugehörigen Pfeiluhren allesamt achsensymmetrisch zur Vertikalen durch den Kreismittelpunkt sind. Erläutert eure Vorgehensweise, wenn ihr hierbei einer mathematischen Argumentation gefolgt seid.
- (d) Gebt eine Vorschrift an, bei der die Pfeiluhr bei manchen Werten für n achsensymmetrisch ist und bei anderen Werten nicht. Erläutert eure Vorgehensweise, wenn ihr hierbei einer mathematischen Argumentation gefolgt seid.

Zusatzaufgabe

Behauptung: Wenn $\text{ggT}(a, n) = 1$ ist, dann hat die Gleichung

$$ax \equiv 1 \pmod{n}$$

genau eine Lösung Modulo n .

Ihr werdet dies beweisen, indem ihr erklärt, warum das Produkt ax alle Werte von 0 bis einschließlich $n - 1$ modulo n genau einmal annimmt, wenn x die Zahlen von 0 bis $n - 1$ durchläuft.

- (a) Inwiefern folgt hieraus die Behauptung?

Angenommen es gilt:

$$ax_1 \equiv ax_2 \pmod{n}$$

für zwei ganze Zahlen x_1 und x_2 .

- (b) Erklärt, wie hieraus folgt, dass

$$a(x_1 - x_2) = k \cdot n$$

für eine ganze Zahl k .

- (c) Leitet hieraus ab, dass n die Differenz von $x_1 - x_2$ teilt.

- (d) Vollendet den Beweis.

Abschlussaufgabe

Wenn man die Vorschriften und die Schieberegler variiert, dann bekommt man wunderschöne Pfeil- und Geradenuhren.

Genau dies sollt ihr jetzt untersuchen.

- Beschreibt, welche geometrischen Phänomene ihr entdeckt: Denkt hierbei an die Lage von Geraden oder Pfeilen, Punkt- und Achsensymmetrie, (die Anzahl der) Zielpunkte, (die Anzahl der) Schleifen, Vielecke, ...
- Entdeckt Regelmäßigkeiten, z.B.: Wenn n ein Vielfaches von 3 ist, dann ...
- Erklärt die Muster, zum Beispiel mit Hilfe der Teilungseigenschaften von Zahlen.

Ihr braucht nicht jedes Mal alle drei Schritte abzuarbeiten. Möglicherweise beschreibt ihr manch schönes Phänomen oder Muster, ohne dieses erklären zu können.

Wir raten euch, mit der Vorschrift $f(x) = ax + b$ zu beginnen. Hiermit kann man bereits zahllose Entdeckungen machen. Probiert danach aus, ob ihr dieselben Phänomene auch bei Vorschriften wie zum Beispiel $f(x) = ax^2$ oder $f(x) = ax^3$ oder noch komplizierteren Vorschriften entdecken könnt. Danach könnt ihr bei diesen komplizierteren Vorschriften natürlich auch noch nach neuen Mustern und Eigenschaften suchen.

Quellen

Uhr: <https://www.kamogo.com>

Arbeitsblatt

