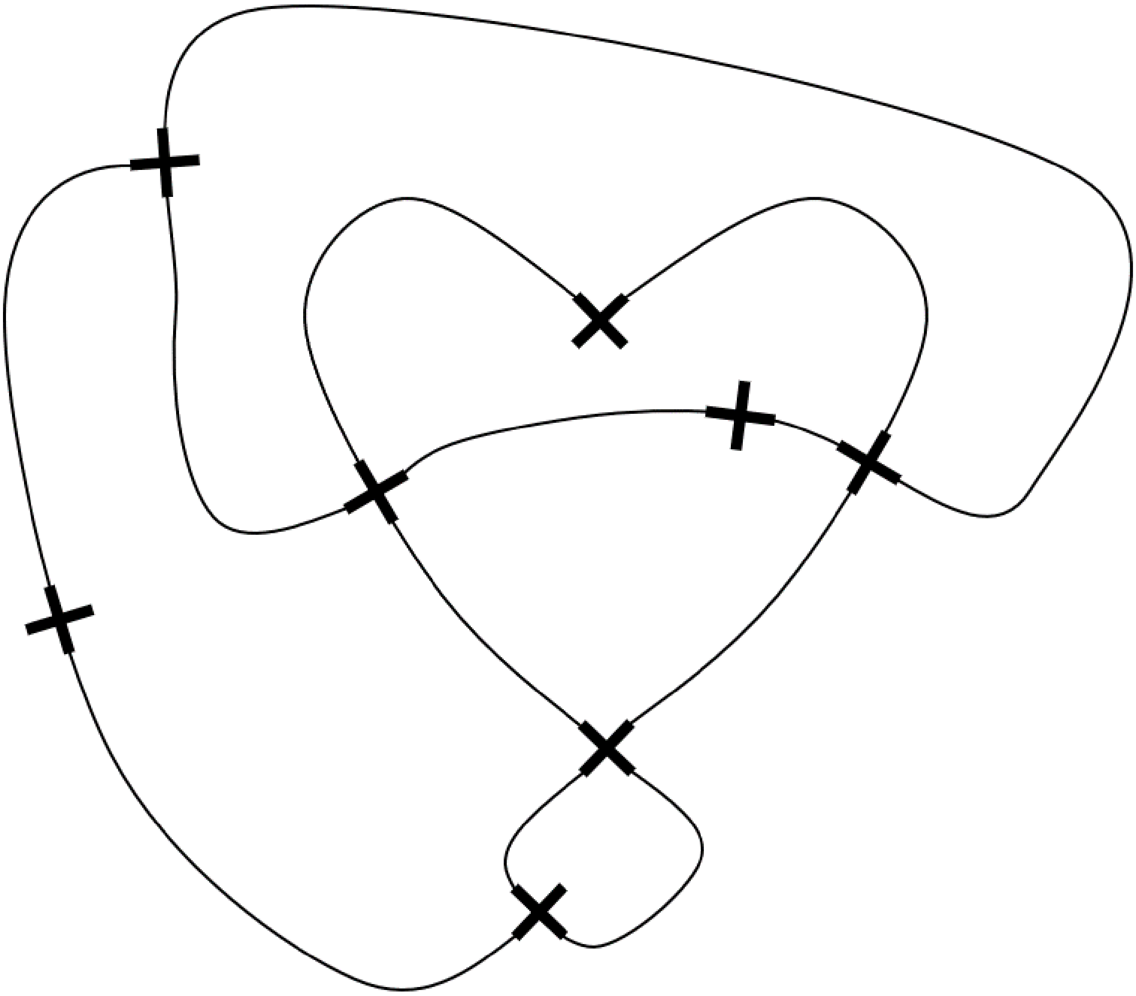
Verbinde und herrsche



Mathematik B-Tag 2019

macht mathe

internationale Mathematikwettbewerbe

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institut

Einleitung

Über die Aufgaben

Die Mathematik-B-Aufgaben drehen sich dieses Mal um etwas, das wir alle gerne tun: wir spielen, und dabei wollen wir auch gewinnen. Manchmal ist das eine Glückssache, aber bei dem Spiel, das ihr heute spielt, liegt die Sache ganz anders…

Teamarbeit

Das Besondere am Mathematik-B-Tag ist, dass ihr Mathematik in Teams betreibt – etwa so wie beim Fußball. Es könnte sinnvoll sein, zunächst eine Aufgabenverteilung zu überlegen. Berücksichtigt dabei die Stärken der einzelnen Teammitglieder. Lasst jeder Teilnehmerin bzw. jedem Teilnehmer genug Raum und Gelegenheit, eigenen Ideen und Lösungsvorschläge beizusteuern.

Der Ablauf des Tages

Die Aufgabe des Mathematik-B-Tags enthält einführende Aufgabenteile und Abschluss-aufgaben. Versucht, mindestens die Hälfte des Tages an den Abschlussaufgaben zu arbeiten.

Arbeitsmaterial

Das braucht ihr heute: Stift, ausreichend Notizpapier, eine Schere, Klebeband, einen Tacker oder Büroklammern, um Papierstücke miteinander zu verbinden, einen Computer oder Laptop, um eure Ausarbeitung anzufertigen. Es ist erlaubt, das Internet zu nutzen (dann solltet ihr die URL der Quelle stets vollständig angeben), aber wir empfehlen dies nicht unbedingt, weil wir vor allem an eurer eigenen Arbeit interessiert sind.

Was müsst ihr einreichen?

Im Laufe des Tages erarbeitet ihr einen Bericht in digitaler Form. Diesen reicht ihr um 15 Uhr ein. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt, insbesondere die Ergebnisse eurer Erforschung der Abschlussaufgabe. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als <u>ein</u> Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule <u>nicht</u> in eurer Arbeit.

Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte – und sicher auch originelle und kreative Berichte. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung sind bei der Beurteilung ausschlaggebend.

Ein paar Tipps zum Schreiben und zur Form des Berichtes:

- Macht einen Zeitplan und teilt euch die Aufgaben unter den Teammitgliedern auf. Es kann helfen, bereits vormittags mit der Ausformulierung der einleitenden Aufgaben zu beginnen.
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht) euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn ihr argumentiert, versucht dies möglichst mit *mathematischen Argumenten* zu tun. Strebt nach einer Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit.
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet zum Beispiel Kopien von Skizzen, die ihr gemacht habt (Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf Papier).

Einleitende Aufgaben

Heute beschäftigt ihr euch mit dem Spiel *Verbinde-und-Herrsche*. Es werden euch verschiedene Varianten dieses Spiels begegnen; also müsst ihr immer gut im Auge behalten, welche Variante in einer Aufgabe gerade eine Rolle spielt.

Die erste Version beginnt mit zwei Plus-Zeichen (s. Bild 1)

Bild 1: Die Ausgangskonfiguration des Spiels

Jedes Pluszeichen kann als ein Punkt mit vier Stacheln oder Ärmchen angesehen werden. So etwas nennen wir einen 4-Knoten. Insgesamt enthält die Ausgangskonfiguration in Bild 1 also 8 Ärmchen.

Spielregeln

Zwei Spieler ergänzen die Zeichnung abwechselnd um einen „Zug". Ein Zug besteht aus dem Verbinden von zwei verschiedenen Ärmchen (desselben oder von zwei verschiedenen Knoten) durch eine Linie (die man zeichnen muss, ohne dabei den Stift vom Papier abzuheben). Auf der Verbindungslinie wird nun ein neuer Knoten angebracht, der so liegen muss, dass zwei seiner Ärmchen auf der Verbindunglinie liegen und die beiden anderen auf verschiedenen Seiten der Linie liegen.

So entsteht zum Beispiel so etwas:

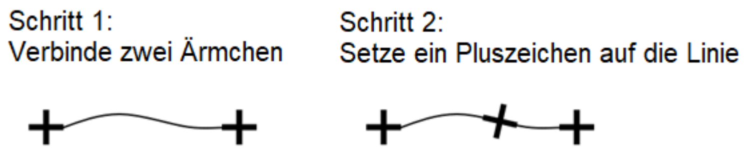


Bild 2: Ein Beispiel für einen ersten Zug beim *Verbinde-und-Herrsche*

Bei einem folgenden Zug werden wieder zwei bisher unbenutzte Ärmchen durch eine Linie verbunden und wieder wird auf die neue Verbindungslinie ein Pluszeichen gesetzt; es könnte dann zum Beispiel das folgende Bild entstehen:

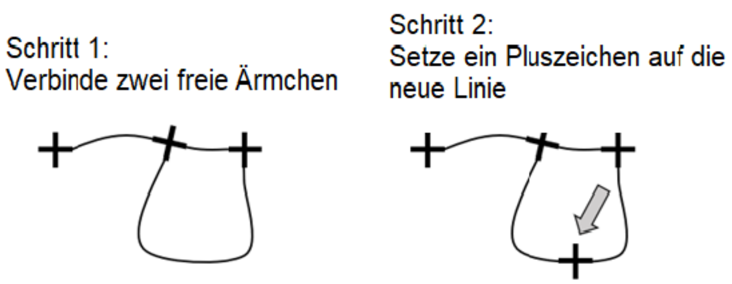


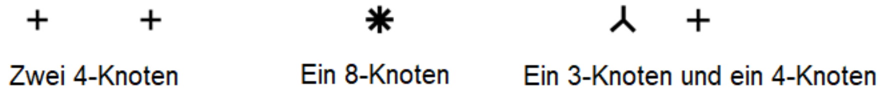
Bild 3: Ein Beispiel für einen zweiten Zug bei *Verbinde-und-Herrsche*

Es werden so nacheinander je zwei vorher unbenutzte Ärmchen miteinander verbunden, wobei zu beachten ist, dass **die neue Verbindungslinie keine der bereits gezeichneten Linien, Knoten oder Ärmchen schneiden darf**. Das durch den Pfeil gekennzeichnete freie Ärmchen in Bild 3 (rechts) könnte also nicht mehr mit irgendeinem freien Ärmchen eines anderen Knotens verbunden werden. Das solltet ihr kontrollieren!

Der erste Spieler, der keinen Zug mehr machen kann (weil keine zwei freien Ärmchen mehr durch eine Linie verbunden werden können, ohne dass dabei eine bereits gezeichnete Linie geschnitten wird), hat das Spiel verloren.

Die Knoten zu Beginn des Spiels können übrigens unterschiedlich gewählt werden (s. folgendes Bild). Auf neue Verbindungslinien setzt man dann bei solchen Varianten aber weiterhin einfach ein kleines zur Linie senkrechtes Strichlein, sodass ein Pluszeichen (wie bisher) entsteht.

Erkundungsauftrag
Spiele das Spiel ein paar Mal mit verschiedenen Ausgangsfiguren (zum Beispiel denen im folgenden Bild). Die Ergebnisse solcher Erkundungen müsst ihr nicht in euren Bericht aufnehmen.

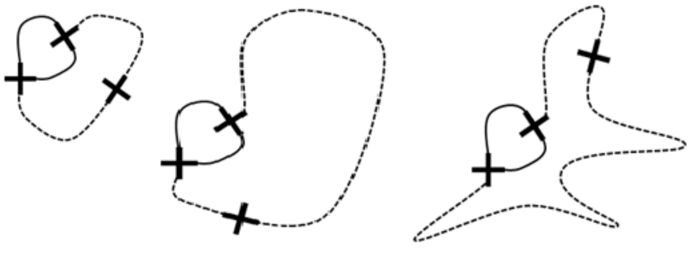


Es sieht so aus, als ob das Spiel stets zu einem Ende kommt – und dass, egal wie ihr spielt, bei jeder Ausgangsfigur stets gleich viele Züge möglich sind. Die Herausforderung an euch besteht nun darin, durch Ausprobieren und Nachdenken möglichst viel über dieses Spiel zu erfahren.

Es lohnt sich oft, erst einmal eine einfache Ausgangssituation zu untersuchen: In der Anfangssituation gibt es nur einen 4-Knoten. Dann gibt es nicht viele Möglichkeiten für den Spielverlauf.

Aufgabe 1 (Übersicht)
Erstellt eine gut durchdachte Übersicht über alle Möglichkeiten, in die sich das Spiel aus der Ausgangssituation mit nur einem 4-Knoten entwickeln kann!

Die Übersicht, die so entsteht, wird nicht unendlich groß, weil man zum Beispiel die Spielverläufe aus den drei folgenden Bildern nicht unterschieden muss (die Züge der Spieler sind abwechselnd durch durchgezogene und gestrichelte Linien gekennzeichnet):



Der *genaue* Verlauf der Linien und wo *genau* der neue Knoten mit seinen zwei Ärmchen liegt, sind für den Spielverlauf nicht relevant.

Aufgabe 2 (Verändern von Linien und Knoten)
Untersucht, ob es für den Spielverlauf von Bedeutung ist, wenn ihr eine Linie oder die Lage eines schon früher gezeichneten Knotens so verändert, das keine anderen Linien oder Knoten geschnitten werden. Gebt Argumente für eurer Ergebnis an.

Wir richten unser Augenmerk nun auf Ausgangssituationen mit nur einem Knoten. Statt mit einem 4-Knoten zu beginnen, können wir auch allgemein über ein Spiel nachdenken, das mit einem d-Knoten beginnt, also einem Knoten mit d Ärmchen. Kann man für jeden Wert von d vorhersagen, wer das Spiel gewinnen wird: der erste oder der zweite Spieler? Die Herausforderung ist jetzt, diese Frage zu beantworten und natürlich auch die Antwort zu verstehen.

Dazu sollte man zunächst nach den *Gebieten* schauen, die in dem Spiel auftreten. Anfangs besteht euer Bild nur aus einem *Gebiet*, nämlich der Zeichenfläche, auf der ihr spielen werdet. In Bild 4 seht ihr eine beim Spiel entstandene Konfiguration mit 4 Gebieten:

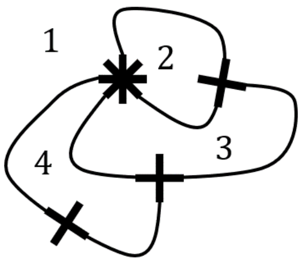
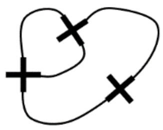


Bild 4: Eine Konfiguration mit 4 Gebieten und 8 noch unbenutzten Ärmchen

In jeder Spielkonfiguration gibt es *benutzte* und *unbenutzte* Ärmchen: unbenutzte Ärmchen sind solche, von denen noch keine Linie ausgeht.

Aufgabe 3 (Untersuchung in Tabellenform)
Untersucht mit Hilfe einer Tabelle wie der untenstehenden, wie sich die Anzahl der unbenutzten Ärmchen und die Anzahl der Gebiete im Laufe eines Spiels verändern, wenn ihr mit einem d-Knoten beginnt – und erklärt eure Beobachtungen.

Spielkonfiguration	Zugnummer z	Anzahl unbenutzter Ärmchen d	Anzahl der Gebiete g
	0	4	1
	1	…	2
	2	…	…
…	…	…	…

Die Anzahl der unbenutzten Ärmchen d ist eine sogenannte *Invariante*: Sie verändert sich nicht. Die Zugnummer z minus die Zahl der Gebiete g, also der Wert von $z - g$, ist auch eine Invariante.

Wenn man am Ende jedes Spiels die erreichte Zugnummer z, die Anzahl der Gebiete g und die Anzahl d der unbenutzten Ärmchen anschaut, dann erkennt man, dass vergleichbare Situationen entstehen.

Aufgabe 4 (eine Formel für die Anzahl der Züge)

a. Gebt eine Formel für die Anzahl der möglichen Züge (in Abhängigkeit von d) in einem Spiel an, das mit einem einzigen d-Knoten beginnt, und benutzt diese Formel, um festzustellen, wann der erste oder der zweite Spieler gewinnt.
b. Begründet, warum diese Formel wahr ist. Als Teil dieses Arbeitsauftrages muss erklärt werden, warum das Spiel nach der angegebenen Anzahl von Zügen sicher zu Ende ist – und warum bis zu diesem Zeitpunkt stets noch ein Zug möglich ist.

First mission accomplished! Aber wir sind noch nicht fertig: Das galt ja nur für Spiele, die mit nur einem Knoten in der Ausgangssituation begannen. Wie sieht es nun bei Spielen aus, die mit mehr als einem Knoten beginnen?

Ab jetzt schauen wir eine Zeitlang Spiele an, die ausschließlich mit 4-Knoten starten; die Anzahl der 4-Knoten in der Ausgangssituation bezeichnen wir mit n
.

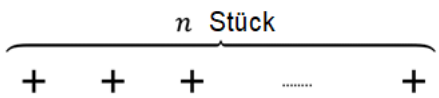


Bild 5: Die neue Ausgangssituation mit n 4-Knoten

Erkundungsauftrag
Spielt das Spiel für $n = 3$, also mit drei 4-Knoten in der Ausgangssituation. Gilt die Formel aus Aufgabe 4a immer noch? Könnt ihr in dieser Ausgangssituation vorhersagen, wer gewinnen wird?

Wenn man mit mehr Knoten beginnt, sieht man während des Spiels, das Knoten miteinander in verschiedenen Gruppen verbunden sind. Wir nennen diese Gruppen *Komponenten* (s. Bild 6) und bezeichnen die Anzahl der Komponenten mit c.

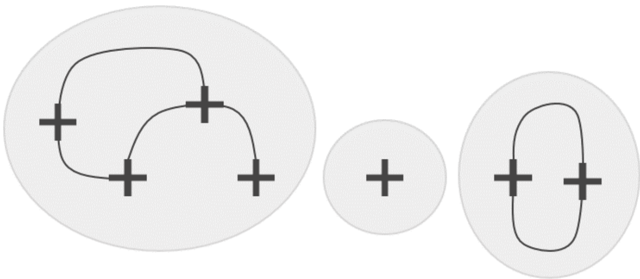


Bild 6: Beispiel für drei Komponenten, die während eines Spiels entstehen, das mit vier 4-Knoten beginnt

Während des Spiels werden bei jedem Zug zwei unbenutzte Ärmchen miteinander verbunden. Wenn die zwei Ärmchen zu verschiedenen Komponenten gehören, dann nennen wir den Zug einen Verbindungszug. Wenn die zwei Ärmchen aber zur gleichen Komponente gehören, dann sprechen wir von einem Spaltungszug.

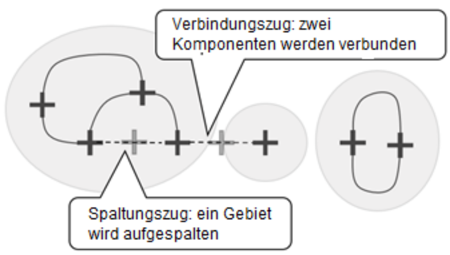
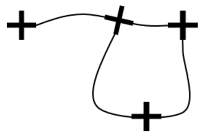


Bild 7: Ein Beispiel für einen Verbindungs- und einen Spaltungszug

Aufgabe 5 (Untersuchung in Tabellenform II)
Fülle die untenstehende Tabelle bis zum letzten Zug für ein Spiel mit zwei 4-Knoten und eines mit drei 4-Knoten aus. Ihr könnt dabei auch von anderen ersten Zügen ausgehen anstatt nur von denen, die hier schon eingetragen sind.

Spielkonfiguration	Zug-Nummer z	Verbindungs- oder Spaltungszug	Anzahl unbenutzter Ärmchen d	Anzahl der Komponenten c	Anzahl der Gebiete g
+ +	0		8	2	1
	1	V	8	1	1
	2	S	…	…	…
…	…	…	…	…	…

Auch bei einer Ausgangssituation mit mehreren 4-Knoten scheint die Anzahl der Züge in einem Spiel festgelegt sein.

Aufgabe 6 (eine Formel für die Anzahl der Züge II)
a. Gebt eine Formel für die mögliche Anzahl von Zügen bei einem Spiel an, das mit n 4-Knoten beginnt, und nutzt diese Formel, um den Gewinner vorherzusagen.
b. Erklärt, wie ihr zur Antwort bei a. kommt. Ihr könnt dabei unter anderem Untersuchungen benutzen, die sich
   - auf die Anzahl der Verbindungszüge und der Spaltungszüge beziehen
   - darauf beziehen, wann das Spiel noch weitergehen kann oder wann es abbrechen muss (behaltet die Anzahl der Ärmchen und die der Gebiete im Auge).

Aufgabe 7 (Argumentieren mit einer Invarianten)
Erklärt, warum $z + c - g$ eine Invariante ist (d.h. dass dieser Wert sich bei keinem Zug ändert). Unterscheidet dabei, ob es sich bei einem Zug um einen Verbindungs- oder einen Spaltungszug handelt. Erklärt die Formel aus Aufgabe 6a. mit Hilfe dieser Invariante.

Erkundungsauftrag
Spielt und untersucht nun einige Spiele mit einer Ausgangssituation, in der verschiedene Knotenarten zusammen auftreten (z.B. Bild 8). Könnt ihr die Anzahl der Züge aus der Gesamtanzahl d aller anfangs verfügbaren Ärmchen und der Anzahl n der Knoten vorhersagen?

Aufgabe 8 (n Knoten)
Untersucht, wer das Spiel gewinnen wird, wenn man mit n Knoten, die möglicherweise auch noch unterschiedliche Anzahlen $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ von Ärmchen haben, beginnt (s. z.B. Bild 8). Erklärt nachvollziehbar, wir ihr zu dem Ergebnis kommt.

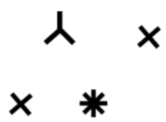


Bild 8: Ausgangssituation mit $d_1 = 4$, $d_2 = 3$, $d_3 = 8$ und $d_4 = 4$

Abschlussaufgaben

Nach den einleitenden Aufgaben folgen nun drei mögliche Abschlussaufgaben. Verschafft euch erst einmal eine Übersicht über alle drei Aufgaben und entscheidet euch dann in eurer Gruppe für mindestens eine von ihnen. Ihr dürft also auch mehr als eine der Abschluss-aufgaben bearbeiten.

Abschlussaufgabe Wahl 1: *Verbinde-und-Herrsche* mit Joker-Zug

Heute habt ihr am Vormittag festgestellt, dass beim *Verbinde-und-Herrsche*-Spiel schon zu Beginn festliegt, welcher Spieler gewinnt – ob die Spieler das nun möchten oder nicht. In dieser Abschlussaufgabe untersuchen wir eine Variante, bei der die Züge der Spieler doch eine Rolle spielen, sodass das Ganze mehr Spielcharakter bekommt.

Die Regeln sind die gleichen wie beim „normalen" *Verbinde-und-Herrsche*. Jetzt darf aber im Spiel einmal (und nicht mehr als einmal!) ein Joker-Zug gemacht werden, bei dem ein Spieler eine Verbindungslinie zeichnet - aber *kein* Plus-Zeichen auf der neuen Linie anbringt. Jeder Spieler darf selbst entscheiden, wann und ob er den Joker-Zug wählt; vorher und nachher sind ihm nur die normalen Züge erlaubt. Sobald ein Spieler den Joker-Zug gewählt hat, kann keiner der Spieler einen weiteren Joker-Zug ausführen.

Aufgabe 1 (Die Wahl spielt eine Rolle)
Zeigt, dass die Auswahlentscheidungen der Spieler in diesem veränderten Spiel wirklich Einfluss darauf haben, wer gewinnt, indem ihr

a. ein Beispiel für einen Spielverlauf gebt, bei dem Spieler 1 gewinnt und
b. ein Beispiel für einen Spielverlauf mit der gleichen Ausgangssituation wie in a. gebt, bei dem Spieler 2 gewinnt.

Aufgabe 2 (Wer gewinnt?)
Untersucht für so viele Ausgangssituationen wie möglich, wer das Spiel gewinnt, wenn beide Spieler so gut wie möglich spielen. Stellt eure Überlegungen und Argumente dar.

Und noch interessanter wird das Spiel, wenn man jedem der beiden Spieler je einen Joker-Zug zugesteht. (Oder einem Spieler sogar zwei Joker-Züge erlaubt, wenn der andere Spieler seine Möglichkeit, einen Joker-Zug einzusetzen, zwischendurch noch nicht ergriffen hat).

Aufgabe 3 (Zwei Joker-Züge)
Untersucht auch für diese Variante mit zwei Joker-Zügen pro Spieler bei so vielen Ausgangssituationen wie möglich, wer dieses Spiel gewinnt, wenn beide Spieler so gut wie möglich spielen. Nehmt wieder eure Überlegungen und Argumente in euren Bericht auf.

Abschlussaufgabe Wahl 2: Spielen auf gekrümmten Flächen

In dieser Abschlussaufgabe entwickeln wir das bisherige Spiel weiter, indem wir ihm einen typisch mathematischen „Dreh“ geben…

Rollt eine Blatt Papier zu einem Zylinder auf und fixiert die Rolle mit Klebstoff, Klebeband oder Klammern); siehe Bild 9

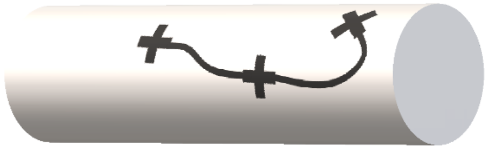


Bild 9: Spielt das Spiel auf einem Zylinder

Erkundungsauftrag
Spielt das Spiel auf der Außenseite des Zylinders mit verschiedenen Ausgangssituationen eurer Wahl. Man darf aber nicht über den (z.B. linken) Rand des Zylinders hinweg gehen und am anderen Rand (also rechts) wieder „auftauchen“. Untersucht, ob das Spiel auf dem Zylinder anders verläuft als bisher auf einer ebenen Zeichenfläche.

Stellt nun zwei ungefähr gleich große Zylinder aus Papier her und klebt die Zylinder so aufeinander wie in Bild 10:

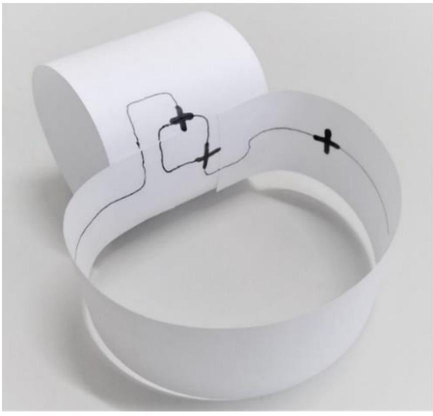


Bild 10: *Verbinde-und-Herrsche* auf zwei aneinandergeklebten Zylindern

Erkundungsauftrag
Spielt das Spiel ein paar Mal mit einem einzigen 4-Knoten als Ausgangssituation auf den verklebten Zylindern. Steht der Gewinner von vorherherein fest?

Auf den verklebten Zylindern kann man manchmal Züge zeichnen, die weder Verbindungs- noch Spaltungszüge sind. Solch einen Zug nennen wir einen *Top-Zug* (als Abkürzung für einen *topologischen* Zug). Durch die Top-Züge ist $z + g - c$ keine Invariante mehr, wie es bei dem Spiel auf einer ebenen Zeichenfläche noch der Fall war. Es scheint nun so, als müsse man genauer hinschauen um festzustellen, ob in einem Gebiet noch Top-Züge möglich sind. Bezeichne mit g_0 die Anzahl der Gebiete, in denen kein Top-Zug mehr möglich ist, mit g_1 die Anzahl der Gebiete, in denen nur ein Top-Zug noch möglich ist, mit g_2 die Anzahl der Gebiete, in denen nur noch zwei Top-Züge möglich sind usw.

Aufgabe 2 (Gewinnen auf dem Doppelzylinder)

a. Untersucht, wer das Spiel auf dem Doppelzylinder gewinnen wird, wenn man mit einem 4-Knoten beginnt.
b. Untersucht auch für so viele Kombinationen wie möglich, wer ein Spiel mit n Knoten mit verschiedenen Ärmchenzahlen gewinnen wird (wieder bezeichnet mit $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$).

Jetzt ist ein Damm gebrochen und ein Meer von Fragen schwappt auf uns zu: Wie verläuft das Spiel, wenn die Spielfläche mit noch mehr Zylinderschlaufen erweitert wird (s. Bild 11)?

Bild 11: *Verbinde-und-Herrsc*he auf drei verbundenen Zylinderschlaufen

Aufgabe 3 (Laufen auf vielen Schlaufen)

Untersucht, wer bei einem Spiel auf einer Fläche von l wie im Bild verklebten Zylinderschlaufen bei einer Ausgangssituation von n 4-Knoten (oder eventuell auch n Knoten mit verschiedenen Ärmchenzahlen $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$) gewinnt.

Abschlussaufgabe Wahl 3: Über Berg und Tal

Bei dieser Wahlaufgabe führen wir eine neue Fragestellung ein, die scheinbar nichts mit dem *Verbinde-und-Herrsche*-Spiel zu tun hat. Und doch bestehen viele Ähnlichkeiten in der Art der Argumentation, die man benötigt, um sich der Fragestellung zu widmen.

Ein Ziel dieser Aufgabe ist es, einen mathematischen Zusammenhang zwischen der Anzahl von Bergspitzen, Tälern, Sattelpunkten, Seen und Inseln in einer Landschaft zu entdecken.

Statt mit dreidimensionalen Landschaftsbildern arbeiten wir hier lieber mit Profilbildern oder Höhenlinienkarten:

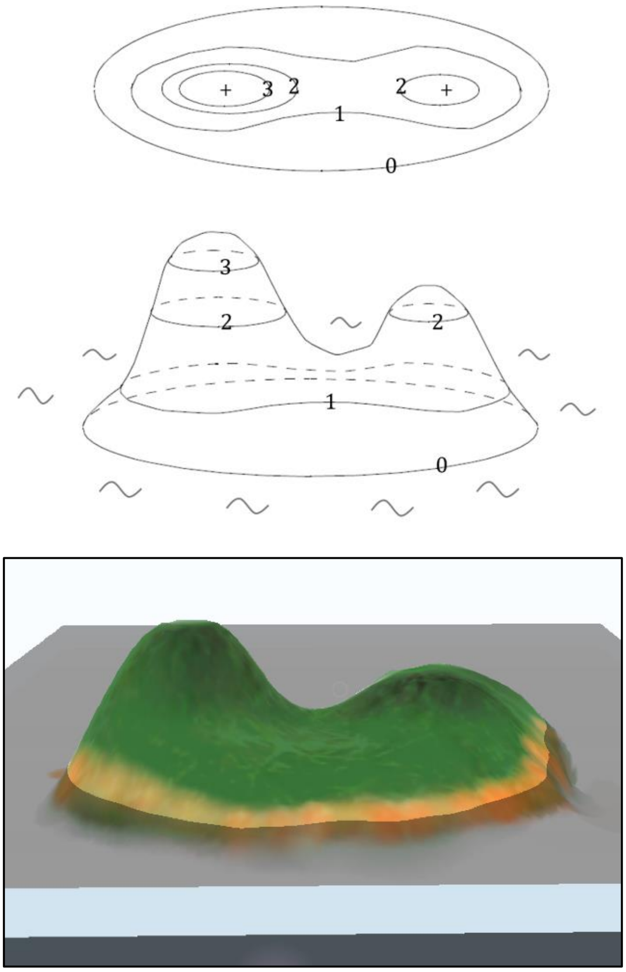


Bild 11: Eine Höhenlinienkarte, eine Skizze und eine naturalistische Abbildung der Insel Lummerland

In der Höhenlinienkarte sieht man zwei Punkte, die durch ein Plus-Zeichen markiert sind: die zwei Bergspitzen. Dort ist die Landschaftsoberfläche „waagerecht“. Aber es gibt noch einen Punkt, in der die Landschaft waagerecht ist: er liegt ungefähr in der Mitte zwischen den Bergspitzen. Hier kommen vier Höhenlinien zusammen (Betrachte die rote achtförmige Linie in Bild 13), und zwischen ihnen geht es abwechselnd bergauf und bergab, wenn man sich von dem Punkt wegbewegt. Solch ein Punkt wird Sattelpunkt genannt, weil diese Form auch für Reitsättel benutzt wird.

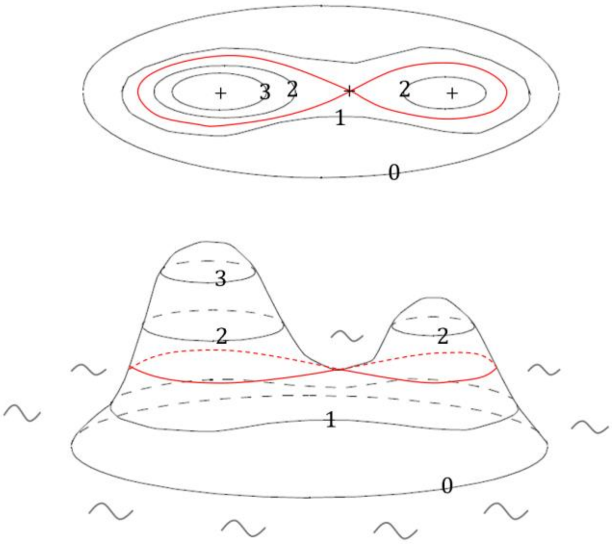


Bild 13: Zwischen den Bergspitzen liegt ein Sattelpunkt; dort kommen vier Höhenlinien zusammen

Ebenso wie auf der Erde liegen alle Landschaften, die wir betrachten, inmitten eines großen Ozeans. Bevor wir dazu weitere Überlegungen anstellen, folgen hier zunächst zwei Übungen zu Landschaften und Höhenlinienkarten. Die Ergebnisse dieser Übungen müsst ihr nicht in euren Bericht aufnehmen.

Übung 1. Skizziert die Landschaft zur Höhenlinienkarte in Bild 14.

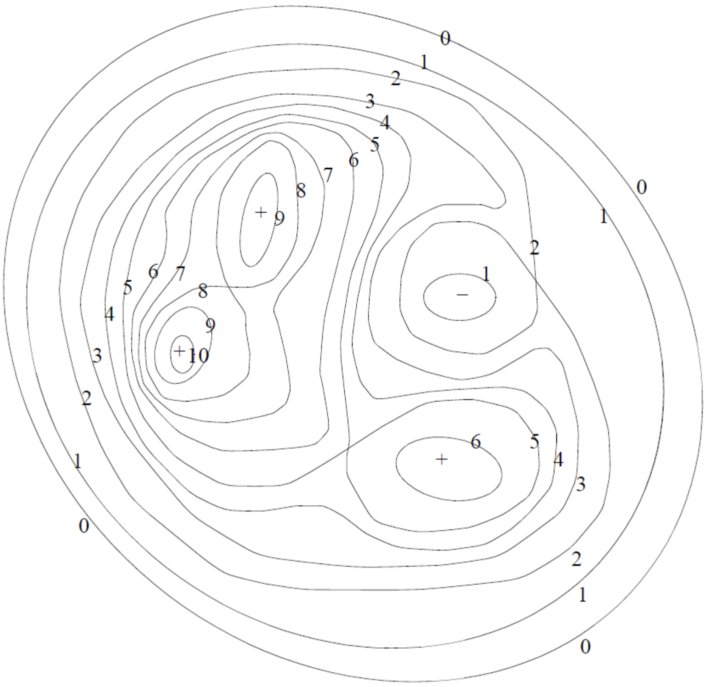


Bild 14: Das Minuszeichen steht für ein Tal; von diesem Punkt aus geht es in jeder Richtung bergauf

Übung 2: Zeichnet eine Höhenlinienkarte für die Landschaft aus Bild 15.

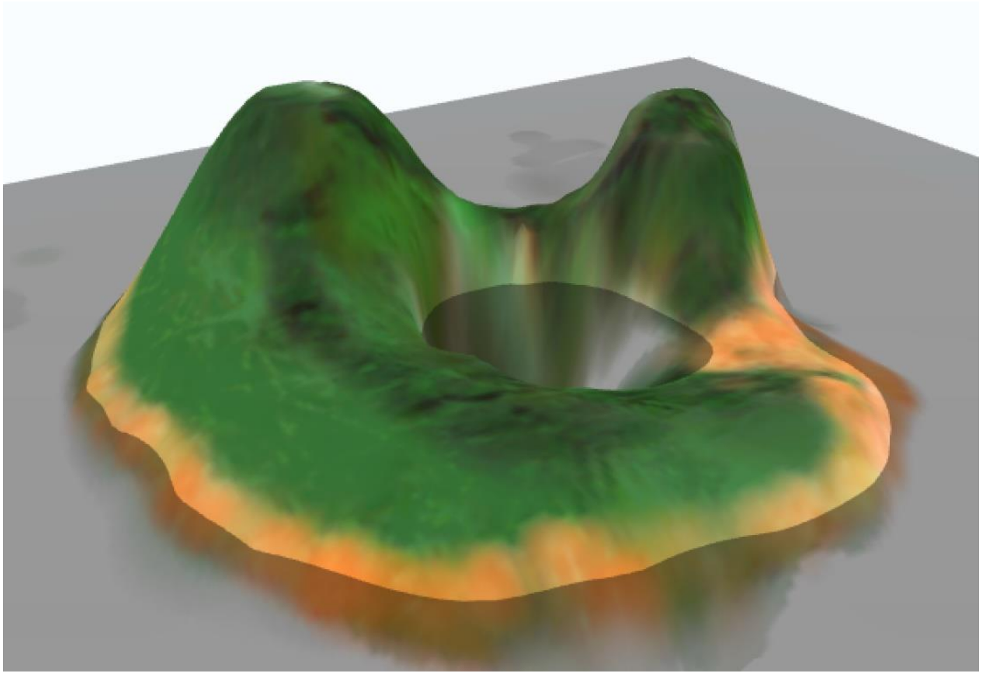
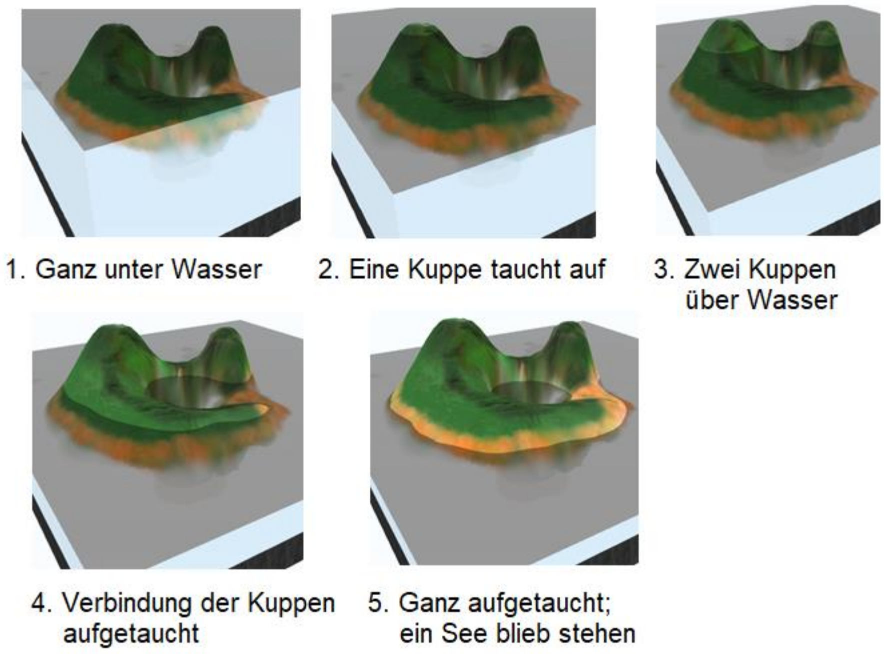


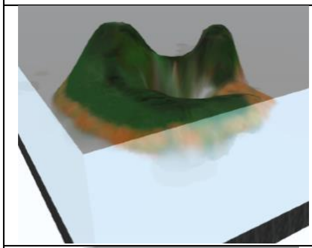
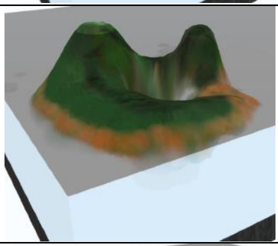
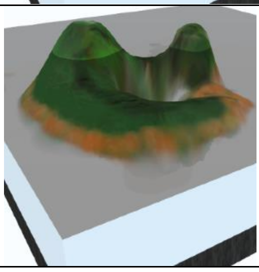
Bild 15: Eine Landschaft

Das Ziel dieser Wahlaufgabe ist es, den Zusammenhang zwischen der Anzahl i der Inseln, der Anzahl s der Seen, der Anzahl b der Bergspitzen und der Anzahl z der Sattelpunkte zu entdecken.

Bei dieser Untersuchung könnt ihr die Idee von Invarianten benutzen (so wie sie euch auch in den einführenden Aufgaben begegnete: Dort wurde jedes Mal ein Zug gemacht, aber das Ergebnis einer bestimmten Formel blieb unverändert).



Hier führen wir keine Spielzüge aus, sondern lassen den Wasserspiegel langsam absinken. Beobachtet bei jedem Absinken des Wasserstandes, wie sich die Anzahl i der Inseln, die Anzahl s der Seen, der Anzahl b der Bergspitzen und die Anzahl z der Sattelpunkte, soweit sie über Wasser liegen, verändert:

Spielsituation	Inseln i	Seen s	Bergspitzen b	Täler t	Sattelpunkte z
	0	0	0	0	0
	1	0	1	0	0
	…	…	…	…	…

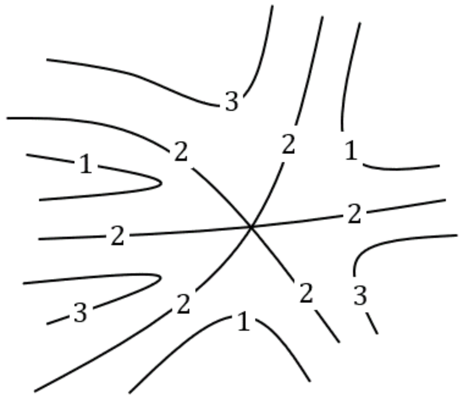
Bei der Erkundung solltet ihr das mit so vielen Landschaften machen wie ihr sie benötigt, um Erkenntnisse zu gewinnen. Ihr werdet ein paar Erscheinungen beobachten, die in der echten Welt unwahrscheinlich sind: Das könnte ein exakt horizontaler Kraterrand sein oder ein horizontales Plateau, oder drei Bergrücken, die in exakt gleicher Höhe aufeinander zulaufen und sich zu einem gemeinsamen Talkessel (einem sogenannten Affensattel; s. Bild 16) absenken, aber bis zur Aufgabe 3 solltet ihr solche Landschaften vermeiden.

Aufgabe 1 (Formel finden)
Untersucht, ob ein Zusammenhang zwischen der Anzahl i der Inseln, der Anzahl s der Seen, der Anzahl b der Bergspitzen und der Anzahl z der Sattelpunkte besteht, die für jede Landschaft (über dem Wasserspiegel) gilt.

Aufgabe 2 (Argumentation)
Begründet, dass euer Zusammenhang tatsächlich gilt.
Hinweis: Verwendet Invarianten, die bei jedem Übergang während des Sinkens des Wasserspiegels unverändert bleiben.

Bei einem normalen Reitsattel ist in zwei „Mulden“ Platz, in dem die Beine des Reiters herunterhängen können, und in den anderen Richtungen wölbt sich der Sattel auf, um dem Rücken des Pferdes oder seinem Halsansatz zu folgen. Bei einem Affensattel gibt es noch eine dritte Mulde für den Schwanz des Affen.

Aufgabe 3 (Formel ausbauen)
Erweitert den Zusammenhang aus Aufgabe 1 so, dass auch Affensättel vorkommen dürfen. Und denkt dann weiter über „Multiaffensättel“ nach: Das sind Sattelpunkte, in denen mehr als drei Bergrücken auf exakt gleicher Höhe zusammenkommen – für Affen mit mehr als einem Schwanz oder eine neunschwänzige Katze….



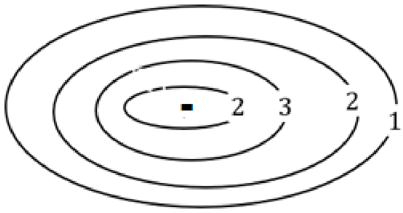


Bild 16: Höhenlinienkarte eines Affensattels (links) und eines exakt horizontalen Kraterrandes