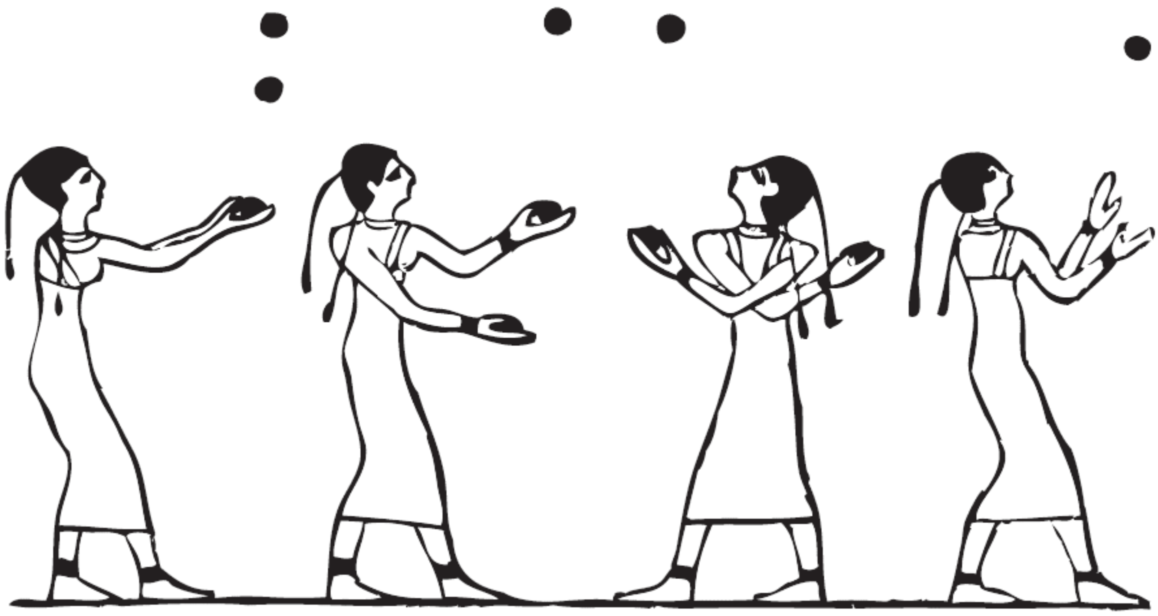
Zauberei mit Bällen



Mathematik B-Tag 2020

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

EINLEITUNG

Über die Aufgaben

Wahrscheinlich habt ihr selbst schon mal probiert zu jonglieren. Mit zwei Bällen erscheint das nicht allzu schwer, aber mit mehreren Bällen wird es schnell viel komplizierter – und auch die Anzahl der Möglichkeiten, die Bälle zu werfen und zu fangen, nimmt schnell zu. Heute wird sich herausstellen, dass sich hinter dem Jonglieren überraschend viel schöne Mathematik verbirgt. Diese zu entdecken, ist eure Aufgabe - ihr seid nun am Ball!

Der Ablauf des Tages

Dieser Mathematik-B-Tag gliedert sich in einführende und abschließende Arbeitsaufträge. Versucht, euch den halben Tag für die Bearbeitung der abschließenden Arbeitsaufträge freizuhalten. Im Gegensatz zu normalen Mathematikarbeiten müsst ihr nicht alle Aufgaben erledigen (auch nicht alle einführenden Aufgaben). Wenn ihr eine Aufgabe nicht lösen könnt oder wenn die Zeit zu knapp wird, dann könnt ihr sie auslassen oder in euren Bericht nur den Teil der Lösung aufnehmen, der euch gelungen ist. Es gibt viele einführende Aufgaben, die von einfachen bis zu schwierigen Fragen reichen. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn ihr nicht alle löst.

Teamarbeit

Das Besondere am Mathematik-B-Tag ist, dass ihr Mathematik in Teams betreibt – etwa so wie beim Fußball. Es könnte sinnvoll sein, zunächst eine Aufgabenverteilung zu überlegen. Berücksichtigt dabei die Stärken der einzelnen Teammitglieder. Lasst jeder Teilnehmerin bzw. jedem Teilnehmer genug Raum und Gelegenheit, eigenen Ideen und Lösungsvorschläge beizusteuern.

Arbeitsmaterial

Das braucht ihr heute: Schreibstifte, eine großen Stapel Schmierpapier, eine Schere, einen Hefter oder Briefklammern, um Blätter zusammenzuhalten, diese Aufgabenblätter und einen Computer oder Laptop, um euren Bericht zu verfassen. Ihr dürft im Internet recherchieren (bitte gebt dann die URL der benutzten Quelle im Bericht an), aber wir empfehlen euch das eher nicht.

Was müsst ihr einreichen?

Im Laufe des Tages erarbeitet ihr einen Bericht in digitaler Form. Diesen reicht ihr um 15 Uhr ein. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt, insbesondere die Ergebnisse eurer Erforschung der Abschlussaufgabe. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als <u>ein</u> Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule <u>nicht</u> in eurer Arbeit.

Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte – und sicher auch originelle und kreative Berichte. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung sind bei der Beurteilung ausschlaggebend.

Ein paar **Tipps** zum Schreiben und zur Form des Berichtes:

- Macht einen Zeitplan und teilt euch die Aufgaben unter den Teammitgliedern auf. Es kann helfen, bereits vormittags mit der Ausformulierung der einleitenden Aufgaben zu beginnen.
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht), euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn ihr argumentiert, versucht dies möglichst mit *mathematischen Argumenten* zu tun. Strebt nach einer Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit.
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet zum Beispiel Kopien von Skizzen, die ihr gemacht habt (Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf Papier).

EINSTIEGSAUFGABEN

Schaut euch das YouTube-Video *The Beauty and mathematics of Juggling* (Alexander Leymann, TEDxDresden**: https//www.youtube.com/watch?v=ELvedTUcjPo**) an. Falls erforderlich, nutzt die Übersetzerfunktion.

Ihr könnt euch das Video komplett während des Vormittags anschauen, aber für die Einführung reicht es aus, die ersten 8 Minuten zu sehen. Die einleitenden Aufgaben 1 bis 8 sind das Minimum dessen, was man bearbeiten muss, um die abschließenden Arbeitsaufträge zu verstehen.

Wurfmuster

Die Arbeitsaufträge 1 bis 4 beziehen sich auf das Video. Eure Bearbeitung dieser Aufträge muss nicht ausführlich schriftlich in eurem Bericht dargestellt werden.

Wir folgen bei unseren heutigen Überlegungen den gleichen Regeln wie im Video: Beim Jonglieren gibt es einen regelmäßigen Taktschlag („beat"), und Bälle werden nur bei einem solchen Taktschlag aufgefangen und sofort wieder geworfen. Dies geschieht abwechselnd mit der rechten und der linken Hand, aber niemals mit beiden Händen gleichzeitig.

1. Alexander spricht von einem **3-Wurf** (im Video nach 1'50"). Wie würdet ihr diesen Begriff in euren eigenen Worten beschreiben? Und was ist ein ***n*-Wurf** (Video 2'08")?
2. In welcher Hand landet der Ball nach einem ***n*-Wurf** aus der linken Hand, wenn *n* gerade ist? Und wo, wenn *n* ungerade ist? Warum? (Video 5'10")
3. Alexander gibt als Beispiel das **Wurfmuster 4,4,1** an. (Video 5'38").
   a. Wie viele Bälle benutzt er dazu?
   b. Was macht der grüne Ball während aufeinanderfolgender Taktschläge?
   c. Übernehmt das Diagramm, das Alexander benutzt!

4. Alexander führt auch – wieder als Beispiel – das **Wurfmuster 5,3,1** vor (Video 6'04").
   a. Wie viele Bälle benutzt er dazu?
   b. Was macht der grüne Ball während aufeinanderfolgender Taktschläge?
   c. Übernehmt das Diagramm, das Alexander benutzt!

Es gibt Taktzeiten, während derer kein Ball gefangen oder geworfen wird. Solch einen Takt nennen wir einen **0-Wurf**. Das ist übrigens gut zu unterscheiden von einem Taktschlag, bei dem man den Ball in der Hand behält und nicht wirft: Das kommt nach unserer Grundregel nämlich nie vor.

Ein Wurfmuster wie 5,3,1 sagt dir bei jedem Taktschlag, was du mit dem Ball machen musst, den du gerade gefangen hast. Dies führt zu einer unendlich langen **Jonglage-Session**, in unserem Beispiel zu …5,3,1,5,3,1,5,3,1…, in der sich das Muster immer wiederholt. Die Zahlen in diesem Muster nennen wir die **Periode** der Jonglage-Session.

Alexander erwähnt drei Bedingungen für Wurfmuster und Jonglage-Sessions (Video ab 6'38"):

i. Ein Wurfmuster stellt eine sich wiederholende Folge von Würfen dar, so dass zum Beispiel das Wurfmuster 5,3,1 die Jonglage-Session …,3,5,3,1,5,3,1,5… beschreibt.
ii. Man fängt abwechselnd mit der linken, dann mit der rechten, dann wieder mit der linken, dann mit der rechten usw. Hand, niemals mit beiden Händen gleichzeitig.
iii. Man wirft niemals zwei oder mehrere Bälle gleichzeitig mit einer Hand.

Wir betonen noch die folgenden Zusätze:

iv. Jeder Ball, den man bei einem Taktschlag fängt, muss beim selben Taktschlag auch wieder geworfen werden. Bälle bleiben also nicht für mehrere Taktschläge in einer Hand.
v. Bälle können während einer Jonglage-Session nicht einfach verschwinden.
vi. Während einer Jonglage-Session tauchen nicht plötzlich neue Bälle auf.

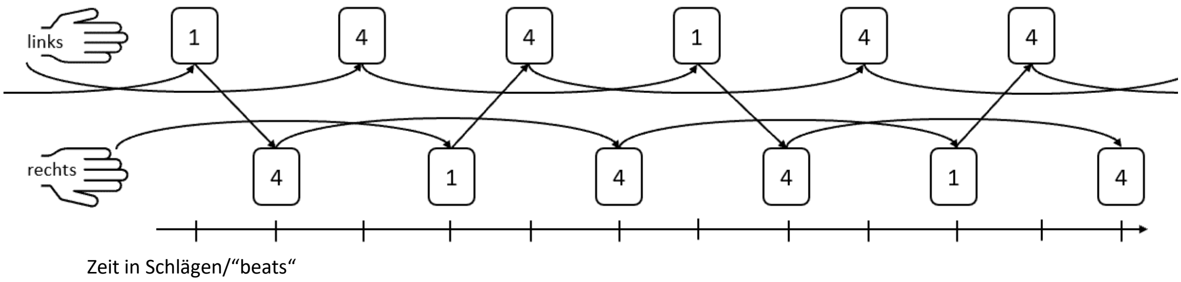
Die Aussagen v. und vi. machen klar, dass das Wurfmuster weder etwas über den Beginn noch über das Ende eines Jonglierkunststücks aussagt: Ein Jonglierkunststück in einer Vorführung ist eigentlich nur ein endlicher Ausschnitt aus einer unendlich gedachten Jonglage-Session.

Für Jonglierkünstler sind Wurfmuster ein wichtiges Kommunikationswerkzeug, wenn sie sich über die Entdeckung neuer Tricks austauchen. Wir werden diese Wurfmuster in den folgenden einleitenden Arbeitsaufträgen weiter durchdenken.

Wechsel- und Wurfdiagramme

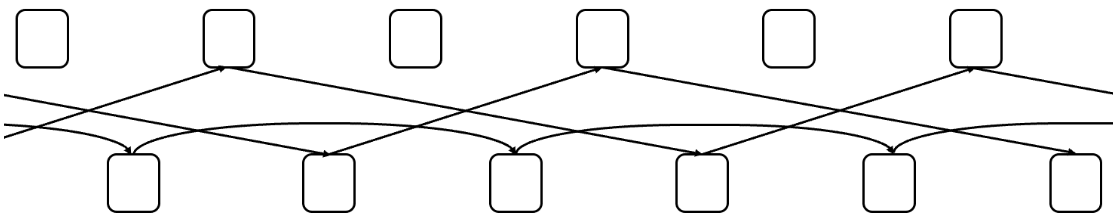
Die Arbeitsaufträge 5 bis 8 helfen euch, den Umgang mit Wurfmustern zu üben und hierzu passende Zeichnungen zu erstellen. Ihr müsst die Antworten auf die Fragen nicht ausführlich schriftlich in euren Bericht aufnehmen.

Im Video habt ihr Bilder eines endlichen Ausschnittes einer Jonglage-Session gesehen, in dem das sich wiederholende Muster mindestens einmal komplett zu sehen war. Solch ein Bild nennen wir ein **Wechseldiagramm**.



Man liest dieses Diagramm von links nach rechts, wobei die Zeit regelmäßig weiterläuft. (Die Taktung ist auf der unteren Gerade dargestellt.) Jeder der gekrümmten Pfeile steht für einen Wurf. Jedes Kästchen stellt den Moment dar, in dem ein Ball gefangen und gleich wieder weitergeworfen wird: oben mit der linken, unten mit der rechten Hand. Im Kästchen wird angegeben, welcher Wurftyp ausgeführt wird. Die „1“ zeigt einen 1-Wurf: der Ball wird mit links so geworfen, dass er beim nächsten Taktschlag in der rechten Hand landet. Die „4“ gibt einen 4-Wurf an: der Ball wird geworfen und landet 4 Taktschläge später in der gleichen Hand, die ihn geworfen hat.

5. Welches Wurfmuster zeigt das folgende Wechseldiagramm?

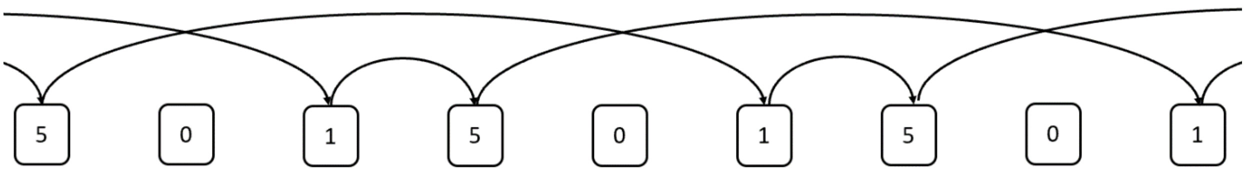


6. Hier sind einige Wurfmuster dargestellt. Welche von ihnen führen zur selben Jonglage-Session?
   5,3,1   5   1,5,3   5,5,5   5,3,1,3   6,1,6,5,7   1,6,6,5,7   5,7,1,6,6

7. Zeichne ein Wechseldiagramm für das Wurfmuster 4,4,1,3.

Ein Wurfmuster, das nur durch eine Zahl (z.B. 5) beschrieben werden kann, heißt ein **Basiswurfmuster**.

Man kann das Wechseldiagramm noch ein wenig vereinfachen. Die Unterscheidung rechts/links ist wahrscheinlich hilfreich, wenn man wirklich das Jonglieren einüben will, aber aus mathematischer Sicht kann man die Kästchenreihen ineinander schieben und im Hinterkopf behalten, das sich die rechte und die linke Hand immer abwechseln. Dann erhält man ein **Wurfdiagramm**.



8. Zeichne ein Wurfdiagramm für das Wurfmuster 4,5,3,0,3

Ist jede Zahlenreihe ein Wurfmuster?

Leider ist nicht jede Zahlenreihe ein Wurfmuster, das zu einer Jonglage-Session führen kann. In den Aufgaben 10 bis 16 werdet ihr erforschen, wie man rechnerisch herausfinden kann, ob eine Zahlenfolge ein Wurfmuster darstellt.

Um zu prüfen, ob eine Zahlenfolge ein Wurfmuster darstellt, kann man zuerst einmal das Wurfdiagramm benutzen:

9.
   a. Benutzt Wurfdiagramme, um zu entscheiden, **ob** 4,4,3,1 und 3,3,4,0,5 Wurfmuster sind.
   b. Erklärt genau, wie man das Wurfdiagramm benutzen kann, um zu entscheiden, ob eine Zahlenfolge ein Wurfmuster ist – und warum das funktioniert.

Zeichnungen anzufertigen ist erst einmal hilfreich – aber was würde man mit der Zahlenreihe 300,3,3 anfangen (mal ganz abgesehen davon, dass man vielleicht nicht so hoch werfen kann)? Dann würde man die Entscheidung, ob ein Wurfmuster vorliegt, lieber rechnerisch treffen.

   c. Probiert das erst mal mit 6,3,3. Ist das ein Wurfmuster? Wie kann man das begründen?
   d. Beginnt mit der Erstellung eines Wurfdiagramms für 500,3,3. Entwickelt aus diesen Erkenntnissen Berechnungen, mit denen man entscheiden kann, ob 500,3,3 ein Wurfmuster ist.
   e. Wie entscheidet ihr, ob 300,12,3 ein Wurfmuster ist?
   f. Und wie entscheidet ihr, ob 300,400,500 ein Wurfmuster ist?

10.
   a. Entwickelt ein allgemeingültiges Verfahren, bei dem ihr nur rechnet oder Zahlen vergleicht und mit dem ihr entscheiden könnt, ob eine Zahlenreihe ein Wurfmuster darstellt oder nicht.
      Beschreibt eure Untersuchungen in eurem Bericht – und natürlich auch euer Verfahren, wenn ihr eines gefunden habt.
   b. Führt euer Verfahren beispielhaft an 4,6,3,1 und an 4,4,4,5,3 vor.
   c. Erklärt, warum euer Prüfverfahren zum richtigen Ergebnis führt.

Erstellen und Verändern von Wurfmustern

Ihr kennt schon einige grundsätzliche Wurfmuster für natürliche Zahlen.

Weitere Wurfmuster fallen aber nicht vom Himmel. Gibt es einen Weg, neue Wurfmuster zu entwerfen? In den folgenden Aufgaben werdet ihr hierzu mehrere Möglichkeiten untersuchen. Eure Funde könnt ihr in euren Bericht aufnehmen.

Im Folgenden sind vier verschiedene Möglichkeiten aufgeführt, um Wurfmuster zu verändern.

I. Angenommen ihr habt des Wurfmuster 5,3,1. Man addiert zu <u>jeder</u> Zahl den Wert 4 und erhält 9,7,5. Ist das ein neues Wurfmuster?
II. Angenommen ihr habt das Wurfmuster 5,3,1. Addiert (oder subtrahiert) eine Periode zu <u>einem</u> der Würfe. Zum Beispiel könntest du die Periode 3 zu der 1 addieren und erhieltest 5,3,4; oder du könntest die Periode 3 von der 5 subtrahieren und erhieltest 2,3,1. Sind das wieder Wurfmuster? Diese Methode nennen wir **Periodizität**.
III. Du kannst auch ein Wurfmuster **rotieren** lassen: Das heißt, dass jede Zahl um eine Stelle nach rechts rückt und aus der letzten Zahl die erste des veränderten Musters wird. So wird beispielsweise aus 7,5,6,2,5 das Muster 5,7,5,6,2.

Das Vertauschen zweier Zahlen in einem Wurfmuster erzeugt in der Regel kein anderes Wurfmuster. Zum Beispiel würde aus 5,3,1 das Muster 5,1,3, und Letzteres ist kein Wurfmuster.

IV. Vertausche zwei Zahlen, addiere dann 1 zu der ersten und subtrahiere 1 von der zweiten der vertauschten Zahlen. So wird zum Beispiel aus 5,3,1 das Muster 5,1+1,3-1, also 5,2,2. Wir nennen das den **Tauschtrick**.

11. Untersuche für jede der Methoden I. bis IV., unter welchen Bedingungen sie aus einem Wurfmuster ein neues Wurfmuster erstellen – und warum das so ist. Untersuche auch, welche Auswirkung die Methoden auf die Anzahl der Bälle hat, die für die Jonglage-Session benötigt werden. Nehmt eure Ergebnisse in euren Bericht auf!

Wenn man den Tauschtrick zweimal mit zwei Zahlenpaaren wiederholt, die sich in der gleichen Position des Wurfmusters befinden, landet man wieder da, wo man gestartet ist. So wird aus 5,3,1 nach dem ersten Tauschtrick 5,2,2 und dann wieder 5,3,1.

Die Anzahl der Bälle, die man für eine Jonglage-Session benötigt, kann aus dem Wurfmuster nicht ohne Weiteres abgelesen werden.

12. Findet heraus, wie man die Zahl der benötigten Bälle aus den Zahlen in einem Wurfmuster errechnen kann. Stellt in eurem Bericht ihr kurz dar, wie ihr diesen Forschungsauftrag angegangen seid, welches Resultat ihr gefunden habt und wie ihr es begründet.

Alle Wurfmuster

In den Aufgaben 14 bis 17 werdet ihr einen Weg erkunden, der euch alle realisierbaren Wurfmuster finden lässt. Ihr könnt eure Erkenntnisse aus diesen Aufgaben in euren Bericht aufnehmen.

Ihr erinnert euch daran, dass Basiswurfmuster diejenigen sind, die einen Wurftyp fortlaufend wiederholen, wie das zum Beispiel bei …3,3,3,3,3,… (oder kurz geschrieben 3) der Fall ist.

Behauptung A: Jedes Wurfmuster kann durch Rotieren und den Tauschtrick in ein Basiswurfmuster überführt werden.

13. Betrachtet 4,5,3,0,3. Woher wisst ihr im Voraus, auf welches Basiswurfmuster ihr zuarbeitet? Warum? Stellt nun dieses Basiswurfmuster aus dem Vorgabemuster her!

14. Prüft, ob Behauptung A überhaupt zutrifft. Wenn das so ist, dann erklärt, warum das der Fall ist. (Führt den Beweis!) Wenn das nicht so ist, so gebt ein Gegenbeispiel an. Erklärt, wie ihr diese Untersuchung angegangen seid.
    (Hinweis: Auch wenn ihr keine endgültige Antwort auf die Forschungsfrage geben könnt: Schreibt auf, was ihr untersucht und ausprobiert habt!)

Behauptung B: Jedes Wurfmuster kann aus einem Basiswurfmuster durch Rotieren und den Tauschtrick hergestellt werden.

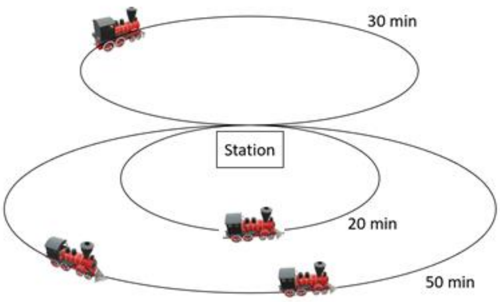
15. Prüft, ob Behauptung B zutrifft. Wenn das der Fall ist, dann erklärt, warum. (Führt den Beweis!). Wenn das nicht der Fall ist, so gebt ein Gegenbeispiel an. Erklärt, wie ihr diese Untersuchung angegangen seid.

16. Erstellt eine Übersicht über alle Wurfmuster mit maximaler Periode 3, in denen nur die Wurftypen 0, 1, 2, 3, 4 und 5 vorkommen. Erklärt, nach welcher Systematik ihr eure Übersicht erstellt habt und warum ihr sicher sein könnt, wirklich alle Möglichkeiten erfasst zu haben.

ABSCHLUSSAUFGABE

Möglichkeit 1

Ein (kleiner) Bahnhof hat nur einen Bahnsteig. Zügen fahren von hier auf verschieden langen Routen ab und erreichen den Bahnhof wieder nach 20, 30 bzw. 50 Minuten. Aus Sicherheitsgründen und um den Verkehrsfluss nicht aufzuhalten, kann an dem Bahnsteig nur alle 10 Minuten ein Zug abgefertigt werden (das heißt, dass der Zug ankommt und wieder abfährt). Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass dieser Abfertigungsprozess ohne Zeitverlust abläuft.



Ein (guter) Fahrplan ist ein Plan der Abfahrtszeiten für die Züge, so dass alle Routen mindestens einmal durchfahren worden sind, ehe der Fahrplan sich wiederholt.

1. Erklärt die Beziehung zwischen dieser Situation und den Wurfdiagrammen / Wurfmustern beim Jonglieren so genau wie möglich. Was sind Gemeinsamkeiten, worin bestehen Unterschiede?
2. Entwerft nun einen guten Fahrplan, wobei ihr das benutzt, was ihr zu Frage 1 geschrieben habt. Seht ihr mehrere Möglichkeiten? Welche Gründe gibt es, den einen Fahrplan gegenüber einem anderen Fahrplan zu bevorzugen?

Nun kommt eine weitere Route hinzu, die in 80 Minuten durchfahren wird.

3. Entwerft wieder einen guten Fahrplan. Seht ihr mehrere Möglichkeiten? Welche Gründe gibt es, den einen Fahrplan gegenüber einem anderen Fahrplan zu bevorzugen?

Um nun die Überlegungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass an dem Bahnsteig jede Minute ein Zug abgefertigt werden kann und dass alle Routenzeiten positive natürliche Zahlen sind.

Behauptung: Für alle Kombinationen von Routen mit den Zeiten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ gibt es einen (guten) Fahrplan.

4. Ist diese Behauptung wahr? Wenn das der Fall ist, dann erklärt die Gründe. Wenn es nicht der Fall ist, liefert bitte ein Gegenbeispiel.

Angenommen ihr habt zwei Routen $t_1 = 2$ und $t_2 = 5$.

5. Untersucht, für welche positiven natürlichen Zahlen k es einen guten Fahrplan mit k Zügen für diese zwei Routen gibt!

Solche Überlegungen kann man für jede endliche Kombination von Routenzeiten $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ anstellen.

6. Ganz allgemein: Was kann man über die mögliche Anzahl von Zügen sagen, für die man noch einen guten Fahrplan erstellen kann? Untersucht diese Fragestellung.

Vorschläge: Gibt es eine obere Schranke für die mögliche Anzahl von Zügen? Sind bestimmte Zugzahlen immer möglich? Ist die Frage vielleicht für bestimmte Kombinationen von Routen leichter zu beantworten?

Ein guter Fahrplan mit einer Periode von 1437 Minuten ist nicht sehr praktisch. Angenommen, ihr seid an einem guten Fahrplan mit der kürzest möglichen Periode interessiert.

7. Untersucht das Problem, wie man eine möglichst kurze Periode zuwege bringt. Was lässt sich darüber aussagen? Erklärt eure Überlegungen an Beispielen und/oder allgemeinen Aussagen, die ihr dann begründet.

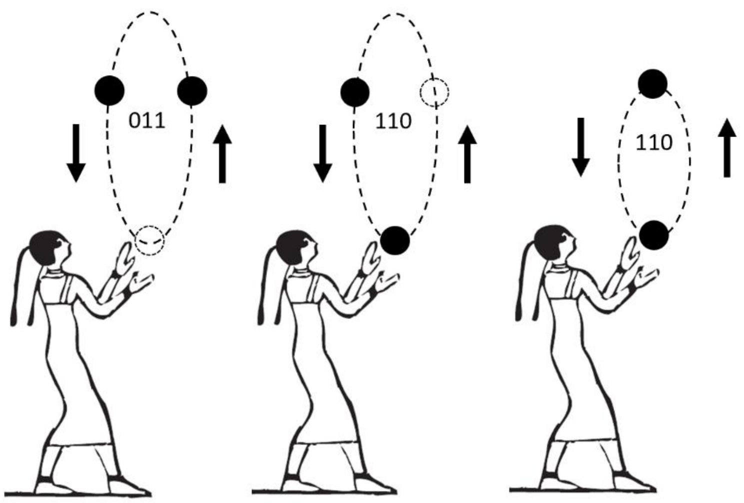
Möglichkeit 2

Jongliergraphen

Heutet morgen habt ihr Wurfmuster erkundet und entworfen. Der Nachteil dieser Modellierung des Jonglierens ist, dass sie den Wechsel von Wurfmustern nicht beschreibt: Ein guter Jongleur schafft es, fließende Übergänge zwischen unterschiedlichen Wurfmustern zu realisieren, so dass seine Vorführung nicht langweilig wird. Darum schauen wir in diesem Arbeitsauftrag eine Modellierung an, die auch das beinhaltet.

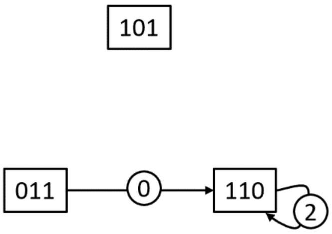
Stellt euch vor, ein Anfänger jongliert mit zwei Bällen und hat es bisher nur geschafft, die Wurftypen 0, 1, 2 und 3 zu meistern. Wie in den Einstiegsaufgaben denken wir uns eine Taktung („beat“), und es sollen die gleichen Regeln weiter gelten. Das Modell besteht nun aus **Zuständen** und **Übergängen**.

Ein Zustand ist eine Folge der Ziffern 0 und 1 – wie zum Beispiel 011 – und tritt bei einem Taktschlag ein. Die erste 0 (oder 1) zeigt, ob man bei dem betreffenden Taktschlag keinen (oder einen) Ball in einer Hand hat. Eine 1 in der *n*-ten Position des Zustandes sagt aus, dass der Jongleur nach den bisherigen (*n*-1) Takten einen Ball in der Hand hat, und eine 0 in dieser Position sagt, dass nach den bisherigen (*n*-1) Takten kein Ball in der Hand des Jongleurs landet. Dabei beachtet man nur die bisher ausgeführten Würfe; bei einem bestimmten „beat“ werden weder der gerade ausgeführte Wurf noch alle zukünftigen berücksichtigt.



Ein Zustand allein beschreibt noch nicht ein Wurfmuster. Natürlich ändert sich der Zustand bei jedem Taktschlag (und das sind dann die oben erwähnten Übergänge). Der Zustand 011 (linke Abbildung) ändert sich nach einem 0-Wurf in den Zustand 110 (mittlere Abbildung). Aber im Zustand 110 kann man einen 2-Wurf oder einen 3-Wurf ausführen. Mit einem 2-Wurf entsteht wieder der Zustand wieder 110, aber das Bild (rechte Abbildung) ist etwas unterschiedlich, weil der letzte 2-Wurf eine niedrigere Kurve beschreibt als die 3-Würfe in den vorausgehenden Abbildungen.

Als nächstes kann man eine Übersicht über alle Zustände mit 2 Bällen erstellen, die nur 0- , 1- , 2- oder 3-Würfe erfahren. Dazu gehören alle Muster aus 2 Einsen und 1 Null, und davon gibt es nur drei: 011, 101, 110. Ihr könnt diese dann als mögliche Zustände und Übergänge in einem Diagramm darstellen, in dem die Kästchen die Zustände und die Pfeile die Übergänge darstellen:

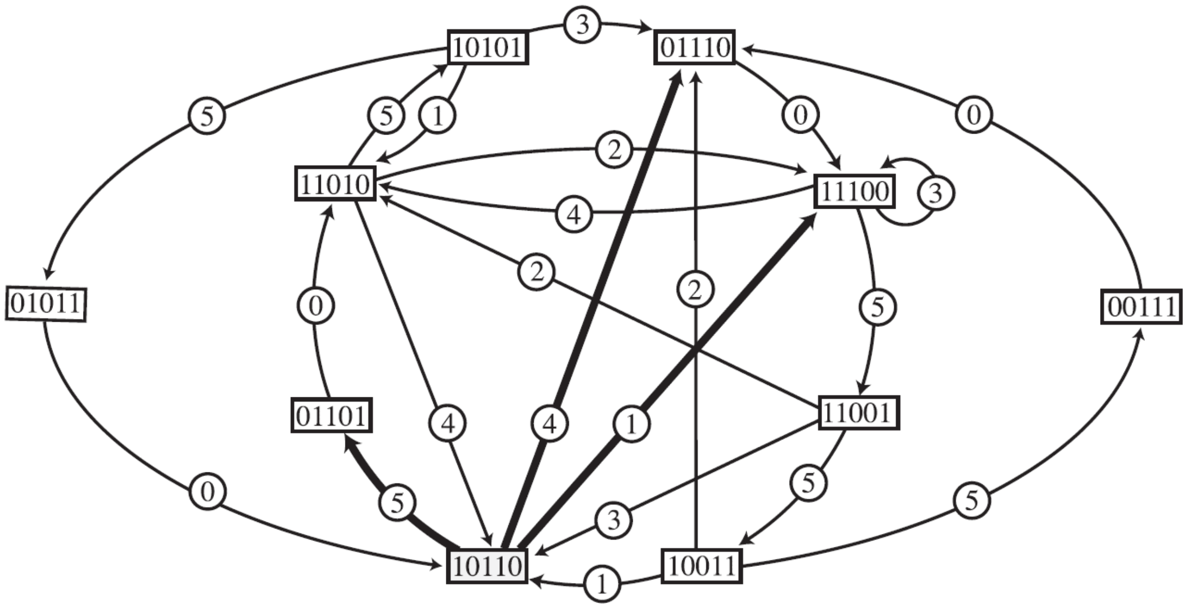


1. Ergänzt das Diagramm mit Pfeilen für alle möglichen Übergänge zwischen den drei Zuständen!

Ein solches Diagramm heißt **Jongliergraph**.

2. Erstellt den vollständigen Jongliergraphen für zwei Bälle und 0- , 1- , 2- , 3- und 4-Würfe!

Im Folgenden ist der Jongliergraph für drei Bälle und 0- , 1- , 2- , 3- , 4- und 5-Würfe dargestellt. Man kann zum Beispiel erkennen, dass es von 10110 ausgehend drei mögliche Übergänge gibt:



3. Erkundet den Zusammenhang zwischen Wurfmustern und Jongliergraphen. Wie kann man Wurfmuster erstellen, wenn man den Jongliergraphen betrachtet?

4. Erforscht, wie man alle Wurfmuster mit einer festen Anzahl von Bällen und einer gegebenen maximalen Wurfhöhe auf systematische Art und Weise mit Hilfe des Jongliergraphen herausfinden kann.

Angenommen ihr erlaubt es dem Jongleur, zwei Bälle gleichzeitig zu fangen und zu werfen, also einen mit der linken, einen mit der rechten Hand.

5. Erkundet, wie das Jongliergraph-Modell dieser neuen Situation angepasst werden kann. Führt in eurem Bericht aus, welche Wahlentscheidungen ihr dazu getroffen habt und schildert ein oder auch mehrere Beispiel(e).

Möglichkeit 3

Nicht-periodische Jongliermuster

Dieser Arbeitsauftrag ist etwas kürzer als die anderen und kann möglicherweise mit Teilen der beiden anderen Wahlmöglichkeiten kombiniert werden.

Man kann die Jongliermuster, die wir bisher gesehen haben, unendlich lange durchhalten – aber sie können doch sehr kompakt beschrieben werden. Das liegt daran, dass sie periodisch sind: nach einer festen Periode wiederholt sich alles. Es gibt aber doch Zahlenfolgen, die man unendlich lange fortsetzen kann, ohne dass dabei periodische Wiederholungen auftreten, und die man doch mit (endlich vielen) Worten beschreiben kann, weil sie eine andere Regelmäßigkeit als eine Periodizität aufweisen. Beispiele:

Folge A: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …

Folge B: 2, 3, 3, 2, 3, 2, 2, 3, 3, 2, 2, 3, 2, 3, 3, 2, …

Solche Folgen, in denen keine Periode auftritt, heißen nichtperiodisch. Weder Folge A noch Folge B sind Jongliermuster, aber es gibt nichtperiodische Jongliermuster!

1. Erstellt ein unendliches, nichtperiodisches Jongliermuster. Erklärt, wie ihr es gefunden haben und wie es funktioniert. Folgende Regeln gelten:
    - Die Zahlenfolge muss jonglierbar sein.
    - Die Zahlenfolge muss eine Regelmäßigkeit enthalten, die man jemanden erklären kann, der keine Ahnung vom Jonglieren hat.
    - Ihr müsst die Anzahl der Bälle, die aus dem Nichts erscheinen oder im Nichts verschwinden, möglichst gering halten. In der Realität sind das Bälle, die dem Jongleur von außen zugeworfen werden oder die einfach herunterfallen und ausscheiden. Das darf geschehen – aber nur endlich oft.
    - Es darf keine Periode auftreten, nach der sich genau dasselbe wie vorher wiederholt. Je interessanter die Folge ist, desto besser!

2. Berechnet, wie viele Bälle für euer Jongliermuster aus dem vorangegangenen Aufgabenteil notwendig sind!

3. Findet eine Methode, um unendliche nichtperiodische Jongliermuster zu erzeugen, zu verändern oder zu kombinieren!

Nichtperiodische Zahlenfolgen können unbeschränkt sein (wie Folge A); das heißt, dass es keine Grenze für die Größe der auftretenden Zahlen gibt, wenn man nur lange genug in der Folge fortschreitet. Die Folgen können aber auch beschränkt sein wie Folge B. Beide Möglichkeiten gibt es auch für nichtperiodische Jongliermuster. Es liegt an euch, für welche Art von Folgen ihr euch entscheidet (vielleicht sogar für beide). Obwohl es im wirklichen Leben schwierig sein dürfte, höher zu werfen als die Entfernung zum Mond, spielt in dieser Aufgabenstellung keine Rolle!