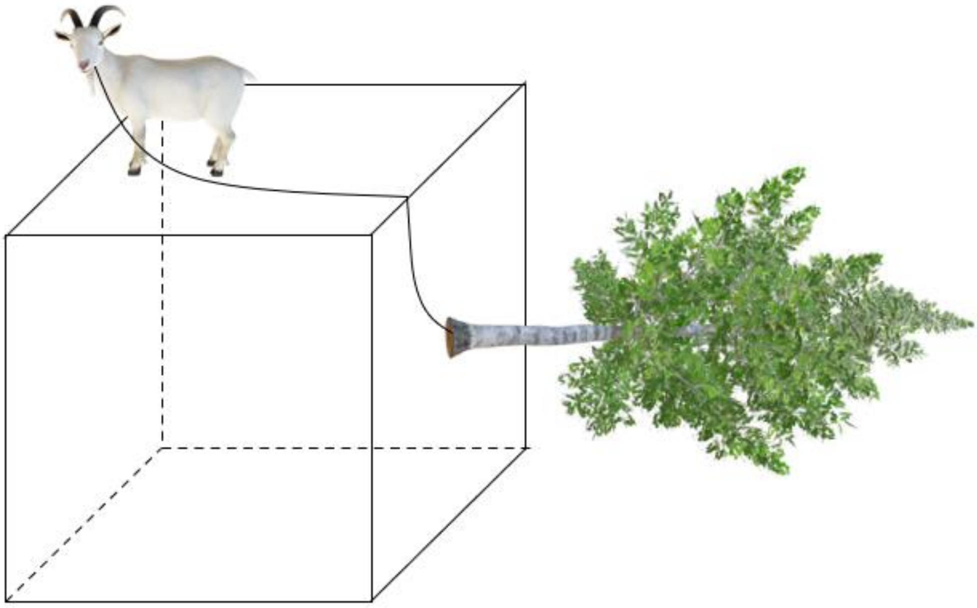
Oberflächliche Geometrie



Mathematik B-Tag 2021

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams
Freudenthal Institute

EINLEITUNG

Über die Aufgaben

Für die meisten Menschen findet Geometrie auf einer zweidimensionalen Fläche statt. Dort schneiden sich Strecken oder sind parallel zueinander. Die Punkte, die den gleichen Abstand zu einem Zentrum haben, bilden einen Kreis. Die Winkelsumme eines Dreiecks beträgt 180 Grad. Dies sollten für euch bekannte Fakten sein.
MathematikerInnen untersuchen diese Zusammenhänge bereits seit der Antike auch auf nicht-flachen Oberflächen. Vielleicht habt ihr ja schon mal was von sphärischer Geometrie gehört – Geometrie auf einer Sphäre, d.h. auf der Oberfläche einer Kugel, wie z.B. der Oberfläche der Erde. Dies ist eine Disziplin, die für Satellitenlaufbahnen und die Frage, wie sich Erdbebenwellen ausbreiten, relevant ist.
Heute geht es für euch um ein ähnliches Abenteuer: Ihr werdet Geometrie auf verschiedenen Oberflächen, z.B. dem Würfel, dem Quader und weiteren Polyedern, untersuchen. Dass Mathematik entscheidend ist, um die Ausbreitung von Schwingungen über ein Gebäude oder die Abstände auf dessen Oberfläche zu untersuchen, ist klar. Auf einer Kugel kann man einen Kreis noch einzeichnen - aber wie sieht das bei einem Polyeder aus? Hier liegen die Dinge überraschend anders!

Tagesablauf

Die folgenden B-Tag-Aufgaben bestehen aus einführenden und weiterführenden Fragestellungen. Im Gegensatz zu normalen Mathestunden müsst ihr nicht alle Aufgaben des B-Tages lösen. Wenn ihr bei einem Problem festhängt oder nicht genug Zeit habt, könnt ihr später nochmal dahin zurückkehren oder es überspringen. Als Hilfestellung gibt es oftmals Lösungsanregungen. Ihr findet sowohl einfache als auch schwierige Aufgaben – daher ist normal, dass ihr nicht alles schafft. Aber **zeigt in eurem Bericht, was ihr versucht habt und wie weit ihr bei den Aufgaben 1 bis 5 gekommen seid – z.B. indem ihr die Anregungen nutzt.** Die Aufgaben 6, 7 und 8 sind Zusatzaufgaben. Wenn ihr euch lang genug mit den Aufgaben 1 bis 5 auseinandergesetzt habt, wählt eine oder mehrere der weiterführenden Aufgaben aus, um tiefer in das Thema einzutauchen. Die erfolgreiche Lösung der letzten Aufgaben kann für euer Team den entscheidenden Unterschied bei der Bewertung machen!

Arbeit im Team

Das Besondere am B-Tag ist, dass ihr Mathematik im Team betreibt. Es kann sinnvoll sein, einen Zeitplan für den Tag zu machen und die Aufgaben aufzuteilen. Nutzt dabei die unterschiedlichen Stärken eurer Teammitglieder. Gebt allen genug Raum, um ihre Idee und Gedanken einzubringen. Ihr könnt entweder alle zur gleichen Zeit an unterschiedlichen Aufgaben arbeiten oder zusammen an einem Problem und dieses dann gemeinsam diskutieren und die Lösung gemeinsam erarbeiten. Für manche Aufgaben ist es sinnvoll, sich unterschiedliche Beispiele anzuschauen. Auch das ist etwas, was man gut im Team aufteilen kann.

Hilfsmittel

Ihr braucht heute: einen Stift, genug (Schmier-)Papier, Scheren, Klebeband und/oder Kleber, diese Aufgaben und einen Computer oder Laptop, um euren Bericht vorzubereiten. Das Internet sollte nicht zum Lösen der Aufgaben genutzt werden. Wenn ihr Online-Quellen nutzt, zitiert diese in eurem Bericht (URL angeben).

Was müsst ihr einreichen?

Im Laufe des Tages erarbeitet ihr einen Bericht in digitaler Form. Diesen reicht ihr um 15 Uhr ein. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als <u>ein</u> Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule <u>nicht</u> in eurer Arbeit.

Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte – und sicher auch originelle und kreative Berichte. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung sind bei der Beurteilung ausschlaggebend.

Ein paar **Tipps** zum Schreiben und zur Form des Berichtes:

- Macht einen Zeitplan und teilt euch die Aufgaben unter den Teammitgliedern auf. Es kann helfen, bereits vormittags mit der Ausformulierung der einleitenden Aufgaben zu beginnen.
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht), euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn ihr argumentiert, versucht dies möglichst mit *mathematischen Argumenten* zu tun. Strebt nach einer Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit.
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet zum Beispiel Kopien von Skizzen, die ihr gemacht habt (Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf Papier).

Einstiegsaufgaben

Aufgabe 1 (Wege einer Ziege auf einem Quader)

Auf einem (rechteckigen) Quader mit Maßen $4 \times 4 \times 10$ liegen die Punkte P und Q auf der linken und rechten 4×4 Fläche. Punkt P liegt 3 Längeneinheiten unter der Mitte der oberen Kante der Fläche und Punkt Q liegt 1 Längeneinheit unter der Mitte der oberen Kante der Fläche (siehe Abbildung 1). Eine Ziege will über die Oberfläche des Quaders von Punkt P zu Punkt Q laufen. Der kürzeste Weg ist nicht der unten eingezeichnete mit der Länge 14.

Untersucht, ob ihr einen kürzeren Weg finden könnt. Und wenn ja, wie lang ist der kürzeste Weg, den ihr finden könnt? Warum denkt ihr, dass es keinen kürzeren geben kann?

Anregungen:

- Erstellt verschiedene Netze des Quaders und faltet sie auf und zu. Notiert die verschiedenen Ergebnisse in eurem Bericht.
- Sucht nach dem kürzesten Weg auf den Netzen.

Ihr könnt ergänzend den Text unter der Abbildung lesen.

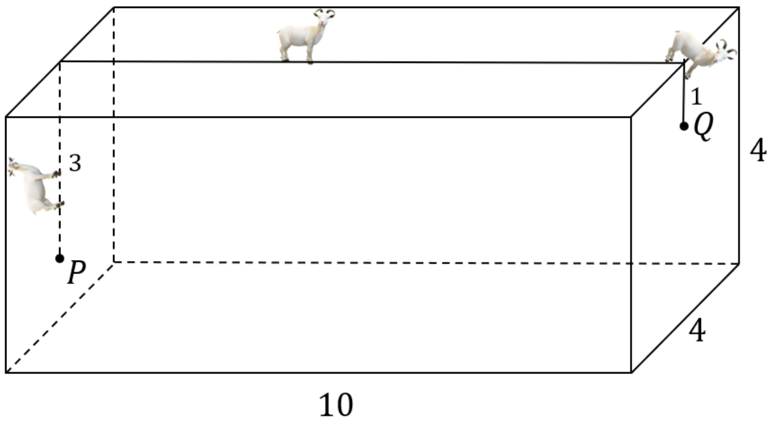


Abbildung 1: Eine Ziege läuft über einen Quader

Randbemerkung: Nehmt einen Papierstreifen und zeichnet zwei Punkte P und Q und die Strecke PQ darauf. Faltet das Papier so, dass die Strecke PQ halbiert wird (Abbildung 2 unten). Die gefaltete Unterteilung von PQ nennen wir S. Zeichnet einen weiteren Punkt T auf der Faltkante ein. Die Strecken PS und QS sehen kürzer aus als PT und QT zusammen, oder? Dies ist natürlich der Fall, weil PS und QS zusammen die Strecke PQ ergeben, welches die kürzeste Strecke zwischen P und Q in der Ebene ist.

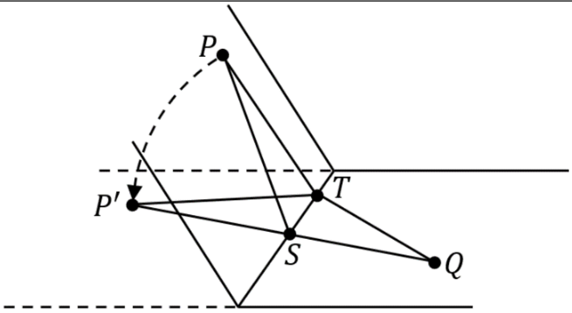


Abbildung 2: Eine Strecke PQ, die von einer Kante halbiert wird, ist gerade, wenn der Knick entfernt wird.

Selbst wenn ein Weg zwischen zwei Punkten an jeder Kante gerade ist, kann es sein, dass er nicht die kürzeste Verbindung zwischen den zwei Punkten darstellt, wenn man das Polyeder aufklappt. Das ist die wichtige Erkenntnis von Aufgabe 1: Es kann mehrere gerade Verbindungen zwischen zwei Punkten geben, wenn man das Polyeder an jeder Kante auffaltet, die aber nicht alle die kürzeste Verbindung zwischen den zwei Punkten darstellen.

Eine **Strecke auf einem Polyeder** ist ein Weg, der auf jeder Fläche gerade ist und - sofern die Strecke eine Kante passiert - auch auf dem flach ausgelegten Netz eine gerade Linie bildet. Eine Verbindung auf einem Polyeder kann nicht durch die Ecken verlaufen. Der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten auf einem Polyeder ist eine Strecke, aber nicht jede Strecke ist ein kürzester Weg (ganz im Gegensatz zu Strecken in der flachen Ebene!).

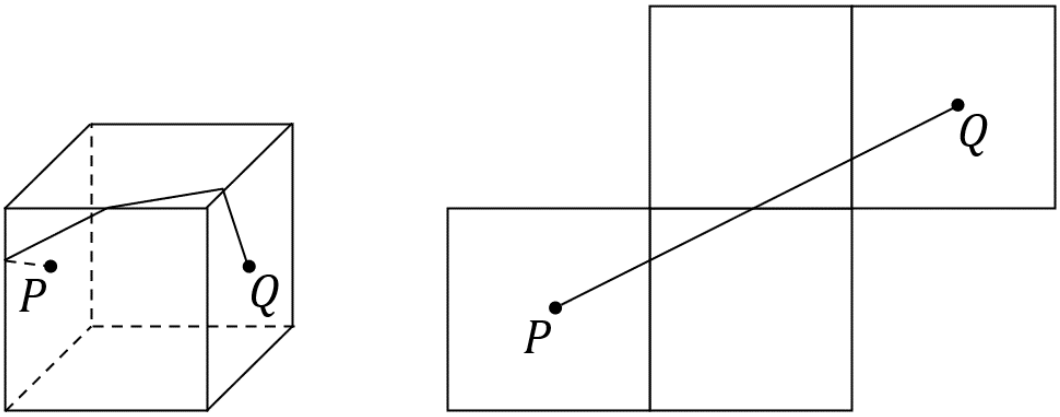
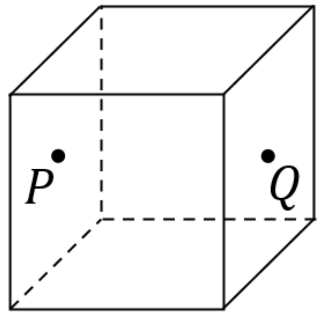


Abbildung 3. Links: Eine Strecke auf einem Würfel – aber nicht der kürzeste Weg.
Rechts: Die gleiche Strecke auf einem Teil eines Netzes.

Aufgabe 2 (Untersuchung von Strecken auf einem Würfel)

a. Findet eine Strecke auf einem Würfel, die sich selbst schneidet (Anregungen auf der nächsten Seite).

b. Punkt P liegt in der Mitte der linken Seite eines Würfels und Punkt Q liegt direkt gegenüber in der Mitte der rechten Seite eines Würfels. Untersucht, wie viele Strecken von P zu Q führen. Hinweis: Eine Strecke muss nicht die kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten sein.



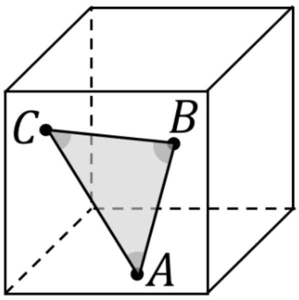
c. Warum sollten wir uns darauf einigen, dass Strecken nicht durch Eckpunkte verlaufen können?

Anregungen:

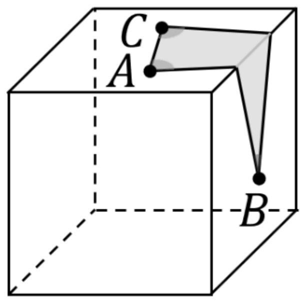
- Erstellt verschiedene Würfelgitter und legt sie ggf. nebeneinander. Faltet sie auseinander und wieder zusammen und sucht nach verschiedenen Möglichkeiten.
- Wichtige Frage: Kann eine Strecke eine Seite mehr als einmal überqueren?
- Wenn ihr eine Vermutung habt, dann versucht auch zu begründen, warum die Behauptung wahr ist und warum es nicht mehr Strecken geben kann.

Unter einem Dreieck auf einem Würfel versteht man eine Fläche, die von drei Strecken auf dem Würfel begrenzt wird, welche wiederum drei Punkte miteinander verbinden. Die Strecken kreuzen weder sich selbst noch die anderen Strecken in irgendeiner Art – analog zu Dreiecken in der flachen Ebene.

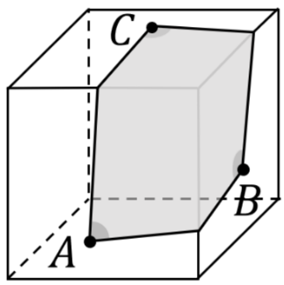
Unten seht ihr vier Beispiele für Dreiecke ABC (Abbildung 4), d.h. die graue Fläche wird von den Strecken AC, AB und BC auf dem Würfel begrenzt. Es ist so, als würde man ein Gummiband straff über die Kanten des Würfels spannen und an den Punkten A, B und C befestigen.



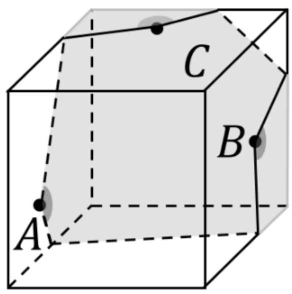
Dreieck auf der Vorderseite



Dreieck „um eine Kante gefaltet"



Dreieck „um den oberen Eckpunkt vorne rechts gespannt"



Dreieck „gestreckt um drei hintere Eckpunkte"

Abbildung 4: Vier Beispiele für ein Dreieck auf der Oberfläche eines Würfels

Ihr könnt drei Winkel an den Punkten A, B und C erkennen. (Die Winkel an den Kanten ignorieren wir.) Normalerweise beträgt die Innenwinkelsumme eines Dreiecks 180 Grad. Dies ist bei den unteren beiden Dreiecken offensichtlich nicht der Fall, hier müssen wir also noch genauere Untersuchungen anstellen.

Aufgabe 3 (Die Winkelsumme eines Dreiecks auf der Oberfläche eines Würfels)

Untersucht, wie groß die Innenwinkelsumme eines Dreiecks auf einem Würfel ist. Erklärt eure Ergebnisse.

Anregungen:

- Die Winkelsumme ist nicht immer die gleiche. Aber es gibt interessante Gesetzmäßigkeiten, die ihr formulieren könnt.
- Untersucht mindestens sechs Beispiele von Dreiecken auf einem Würfel, die so verschieden sind wie nur möglich. Nutzt dafür verschiedene Würfelgitter.
- Formuliert Hypothesen über die Winkelsumme und überprüft sie mit weiteren Beispielen.
- Solltet ihr eine Gesetzmäßigkeit gefunden haben, dann erläutert auch, warum sie wahr ist. Beispiele und Skizzen können beim Erklären helfen, aber eure Argumente sollten allgemeingültig sein.

Aufgabe 4 (Kubische Ziegenweide)

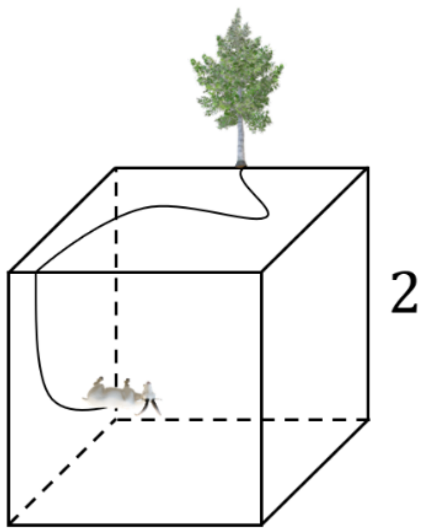


Abbildung 5: Eine am Baum festgebundene Ziege an einem Seil auf einem Würfel

Auf der Oberfläche eines Würfels mit Kantenlänge 2 wächst köstliches Gras. In der Mitte einer Kante steht ein Baum. Der Bauer hat die Ziege mit einem Seil am Baum festgebunden. Das kürzeste Seil, mit dem die Ziege alles Gras erreichen kann, ist länger als $\sqrt{13}$ und kürzer als $\sqrt{17}$. Was ist die kürzeste Länge für das Seil, die ihr finden könnt? Warum denkt ihr, dass es nicht kürzer sein kann?

Anregungen:

- Erklärt zunächst, warum die am weitesten entfernten Punkte **nicht** die Eckpunkte des Würfels sind, indem ihr mindestens einen Punkt findet, der weiter entfernt ist. Die folgenden zwei Anregungen können dabei helfen.
- Zeichnet die Situation aus einer anderen Perspektive.
- Eine weitere Idee könnte sein, das Seil sukzessive immer länger zu machen und zu schauen, welche Punkte man mit dem gespannten Seil erreichen kann. Mit Länge 1 erreicht man nur die nächsten beiden Eckpunkte und der Bereich besteht aus zwei Halbkreisen. Ab da wird es komplizierter…
- Ein am weitesten entfernter Punkt kann vom Baum aus durch zwei (gleich lange) Strecken erreicht werden. Warum?
- Wenn ihr eine Vermutung habt, so wählt eine geeignete unbekannte Strecke und nennt diese x. Nehmt diese als Grundlage für eure weiteren Berechnungen.

Wenn das Seil gespannt bleibt, dann läuft die Ziege in einem Kreis auf dem Polyeder. Mit Kreis sind hier „Punkte mit einem festen Abstand von einem Zentrum“ gemeint. Kreise auf einem Polyeder sehen so aus, als würden sie aus mehreren aneinander geklebten Kreissegmenten bestehen.

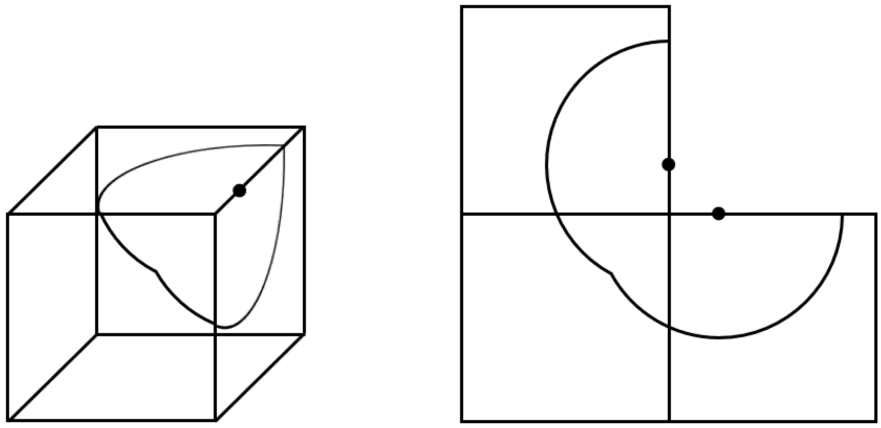


Abbildung 6: Ein Kreis auf einem Würfel. Die Bögen auf der Oberfläche (links) und auf (Teilen eines) Würfelgitters (rechts).

Aufgabe 5 (Drei grasende Ziegen)

Ein Bauer hat drei Ziegen, die auf der saftigen Weide auf einem Würfels grasen dürfen. Jede Ziege ist mit einem Seil an einen Pflock gebunden. Jedes Seil hat die gleiche Länge.

Untersucht, wo der Bauer die Pflöcke positionieren sollte und wie lang die Seile sein sollten, damit die Ziegen so viel Gras wie möglich essen, sich aber nicht gegenseitig erreichen können.
Nehmt die beste Lösung, die ihr finden könnt, in euren Bericht auf. Erklärt auch, wie ihr sie gefunden habt, und begründet, warum es keine bessere geben kann (Anregungen auf der nächsten Seite).

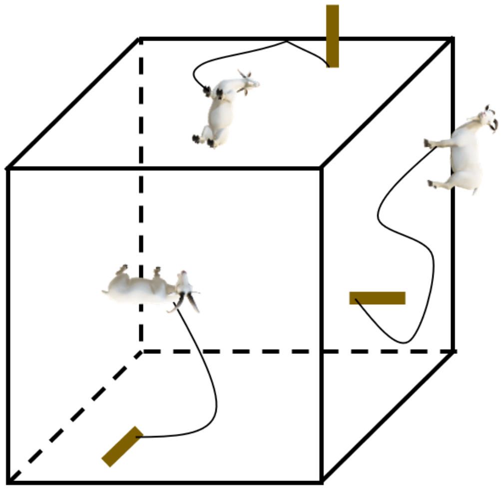
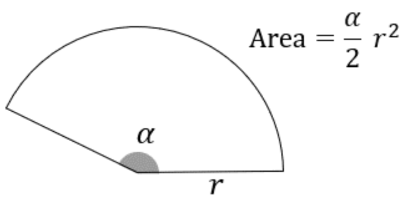


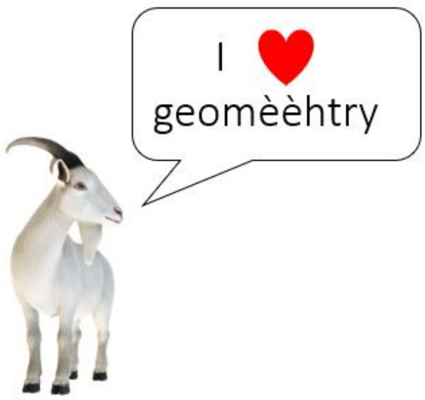
Abbildung 7: Drei grasende Ziegen auf einem Würfel

Anregungen:

- Testet auf jeden Fall mehrere verschiedene Optionen aus.
- Könnt ihr euch Gründe vorstellen, warum die Lösung mehrere Bedingungen erfüllen muss?
- Berechnet die Länge des Seiles und die Größe der Fläche. Die Fläche eines Kreissegments mit Winkel α (im Bogenmaß) und Radius r ist $\frac{\alpha}{2\pi} \cdot \pi r^2$ (wieso?), was zu $\frac{\alpha}{2} r^2$ vereinfacht werden kann.



Um die Fläche eines Kreises auf einem Würfel zu berechnen, müsst ihr die Figur in Kreissegmente und Dreiecke ($Fläche = \frac{1}{2}\ Grundseite\ \cdot Höhe$) unterteilen.



Weiterführende Aufgaben

Wir laden Euch ein, ein weiteres (oder mehrere) der untenstehenden Probleme zu lösen. Es handelt sich um weiterführende Untersuchungen der Einstiegsaufgaben.

In Aufgabe 1 ging es darum, den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten auf einem Polyeder zu finden. Vielleicht war die Suche da noch etwas ineffizient und chaotisch. Schauen wir uns nun das gleiche Problem auf einem regelmäßigen Tetraeder (Polyeder mit vier gleichseitigen Dreiecken als Seitenflächen) an.

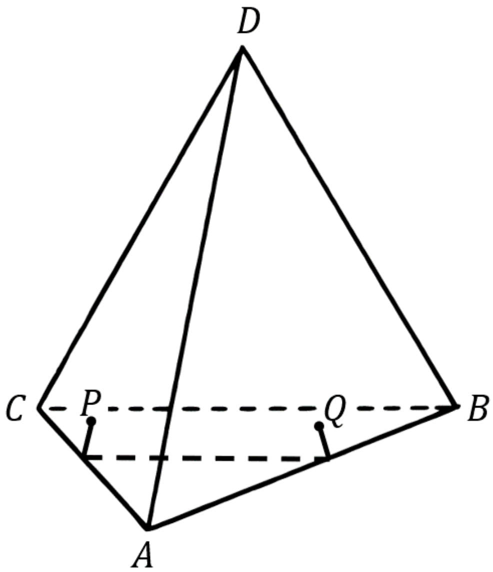


Abbildung 8: Ein regelmäßiges Tetraeder
Ist die gepunktete Strecke der kürzeste Weg zwischen P und Q?

Die kürzeste Verbindung kann am besten gefunden werden, indem man ein Dreiecksgitter nutzt, welches als Feld von aneinander geklebten Netzen gesehen werden kann.

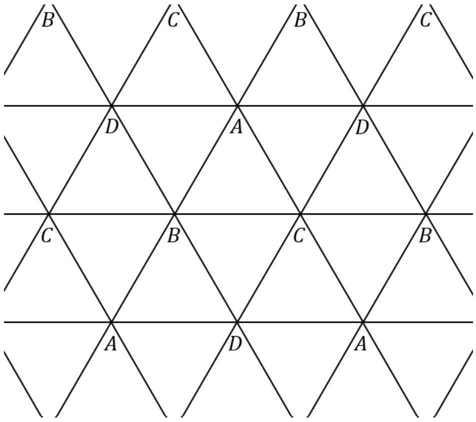


Abbildung 9: ein Feld aus aneinander geklebten Netzen eines regelmäßigen Tetraeders.

Aufgabe 6

a. Erklärt, wie man das Gitter aus Abbildung 9 sinnvoll nutzen kann, um die kürzeste Verbindung zwischen P und Q zu finden.

Für andere Polyeder ist es leider nicht so einfach, die Netze aneinander zu legen. Die Herausforderung besteht also darin, andere effiziente und strukturierte Wege zu finden, um die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten zu finden und zu beschreiben.

b. Versucht es als erstes für den Würfel. Ihr könnt die Methode anschließend auf andere Polyeder übertragen, wenn ihr möchtet.

Aufgabe 7

In Aufgabe 5 habt ihr versucht, drei Ziegen auf dem Würfel zu platzieren. Könnt ihr das gleiche Problem auf einem anderen Polyeder lösen und/oder mit einer anderen Anzahl an Ziegen? Findet eine Kombination aus Polyedern und einer Anzahl an Ziegen, bei denen das Problem spannend ist.

Aufgabe 8

In Aufgabe 3 habt ihr die Winkelsumme von Dreiecken auf einem Würfel untersucht. Wie verhält sich die Winkelsumme bei anderen Polyedern? Es gibt sogar sogenannte Zweiecke (mit zwei Eckpunkten und zwei Seiten) und Einecke (mit einem Eckpunkt und einer Seite) auf einem Würfel. Versucht, eure Erkenntnisse auf alle Polyeder zu erweitern. Ergänzend könnt ihr versuchen, die Winkelsumme von Polygonzügen auf anderen Polyedern zu untersuchen (z.B. das regelmäßige Tetraeder aus Aufgabe 6).

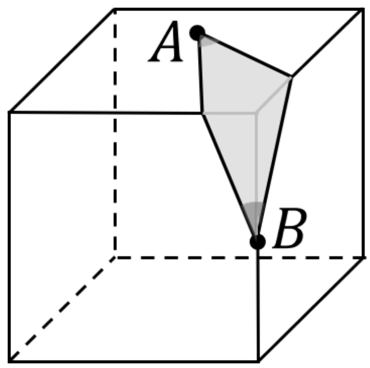


Abbildung 10: Ein Zweieck auf einem Würfel