Mathematik B-Tag 2022

macht mathe

internationale Mathematikwettbewerbe

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams

Freudenthal Institute

EINLEITUNG

ÜBER DIE AUFGABE

In der diesjährigen Aufgabe geht es darum, ob etwas möglich ist oder nicht. Wasser und Kannen bzw. Krüge spielen eine Hauptrolle. Die Aufgabe fordert euch heraus, mit eurem Team Untersuchungen anzustellen. Habt aber keine Angst vor kalten Füßen und taucht ein in die Erforschungen! Wir gehen davon aus, dass ihr nicht im Eis einbrechen werdet. Ja, ihr könnt das schaffen! „Yes, you can!"

TAGESABLAUF

Diese Mathematik-B-Tag-Aufgabe setzt sich aus Einführungsaufgaben und zusätzlichen tiefergehenden Fragestellungen zusammen. Anders als in normalen Mathematik-Unterrichtsstunden, müsst ihr nicht alle Aufgaben am Mathematik-B-Tag lösen. Wenn ihr bei einem Problem nicht weiterkommt oder nicht genügend Zeit habt, könnt ihr es zurückstellen oder komplett überspringen. Um euch unter die Arme zu greifen, gibt es bei manchen Aufgaben Hinweise. Die Schwierigkeit der Fragestellungen reicht von einfach bis schwer. Es ist also in Ordnung, wenn ihr nicht alles schafft. Zeigt aber wenigstens in eurer Ausarbeitung, was ihr versucht habt und wie weit ihr gekommen seid – zum Beispiel auch mit Hilfe der Hinweise.

Nachdem ihr euch lange genug mit den Einführungsaufgaben beschäftigt habt, wählt eine oder mehrere zusätzliche Aufgaben aus, um tiefer in das Thema einzusteigen. Die erfolgreiche Lösung der letzten Aufgaben kann für euer Team den entscheidenden Unterschied bei der Bewertung machen!

ARBEIT IM TEAM

Das Besondere am B-Tag ist, dass ihr Mathematik im Team betreibt. Es kann sinnvoll sein, einen Zeitplan für den Tag zu machen und die Aufgaben aufzuteilen. Nutzt dabei die unterschiedlichen Stärken eurer Teammitglieder. Gebt allen genug Raum, um ihre Idee und Gedanken einzubringen. Ihr könnt entweder alle zur gleichen Zeit an unterschiedlichen Aufgaben arbeiten oder zusammen an einem Problem und dieses dann gemeinsam diskutieren und die Lösung gemeinsam erarbeiten. Für manche Aufgaben ist es sinnvoll, sich unterschiedliche Beispiele anzuschauen. Auch das ist etwas, was man gut im Team aufteilen kann.

HILFSMITTEL

Heute braucht ihr: einen Stift, genügend (Schmier-)Papier, diese Arbeitsanweisung, einen Computer oder einen Laptop, um euren Bericht vorzubereiten, und möglicherweise eine Tabellenkalkulation oder ähnliches. Das Internet sollte nicht zum Lösen der Aufgaben genutzt werden. Wenn ihr doch Online-Quellen nutzt, zitiert diese dann in eurem Bericht (URL angeben).

WAS MÜSST IHR EINREICHEN?

Im Laufe des Tages erarbeitet ihr einen Bericht in digitaler Form. Diesen reicht ihr um 15 Uhr ein. Darin beschreibt ihr die Lösungen, die ihr zu den Aufgaben gefunden habt. Schreibt deutlich und überzeugend in euren eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als <u>ein</u> Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format (max. 8 MB) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule <u>nicht</u> in eurer Arbeit.

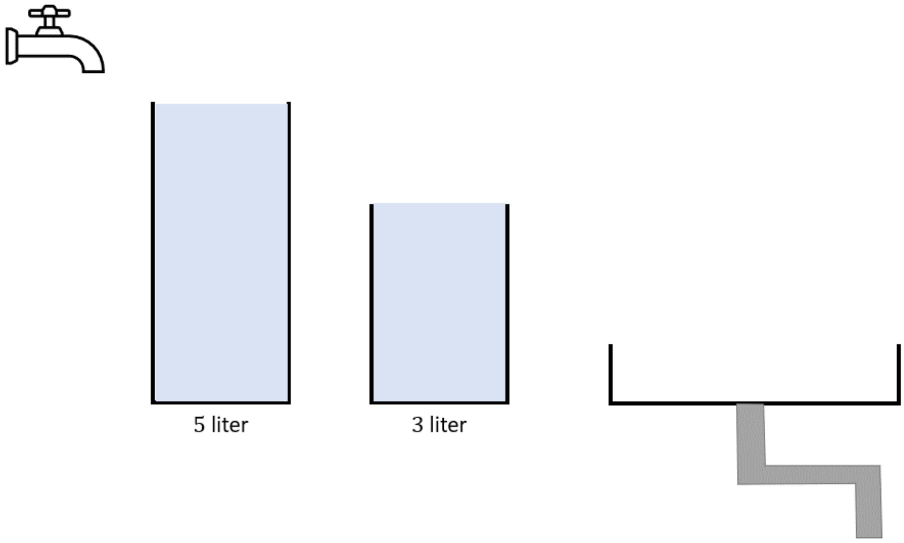
Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte – und sicher auch originelle und kreative Berichte. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung sind bei der Beurteilung ausschlaggebend.

Ein paar **Tipps** zum Schreiben und zur Form des Berichtes:

- Macht einen Zeitplan und teilt euch die Aufgaben unter den Teammitgliedern auf. Es kann helfen, bereits vormittags mit der Ausformulierung der einleitenden Aufgaben zu beginnen.
- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik B-Tag teilgenommen hat (aber genug Mathematik beherrscht), euren Text verstehen kann. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.
- Wenn ihr argumentiert, versucht dies möglichst mit *mathematischen Argumenten* zu tun. Strebt nach einer Kombination aus Klarheit, Kürze und Korrektheit.
- Benutzt Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Verwendet zum Beispiel Kopien von Skizzen, die ihr gemacht habt (Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf Papier).

Einführende Aufgaben

Aufgabe 1 (Es ist (un)möglich)



FIGUR 1. ZWEI KRÜGE, EIN WASSERHAHN UND EIN SPÜLBECKEN

Angenommen ihr habt zwei leere Krüge – einen 5 Liter Krug und einen 3 Liter Krug, einen Wasserhahn und ein Spülbecken, aus dem das Wasser unmittelbar abfließt (siehe Figur 1). Erlaubt sind die folgenden Aktionen:

i. den vollständigen Inhalt eines Kruges in das Spülbecken kippen
ii. einen Krug unter dem Wasserhahn vollständig auffüllen
iii. Wasser von einem Krug in einen anderen füllen, bis der erste leer oder der zweite voll ist

a) Untersucht, ob ihr auf diese Weise 4 Liter abmessen könnt, in anderen Worten, ob ihr auf diese Weise einen Krug mit genau 4 Litern füllen könnt. Erklärt bei der Bearbeitung der Aufgabe auch eure Zwischenschritte.

b) Untersucht, ob ihr mit den folgenden Kruggrößen 4 Liter abmessen könnt:
   - 8 Liter und 3 Liter
   - 7 Liter und 3 Liter
   - 6 Liter und 3 Liter

   Erklärt in der Bearbeitung der Aufgabe eure Vorgehensweise. Ihr könnt dabei Tabellen nutzen, in denen ihr notiert, wie viel Liter Wasser in welchem Krug in welchem Schritt vorhanden ist, so wie es für den Fall von 8- und 3-Liter-Krügen unten aufgeführt ist:

Zustand	8 Liter	3 Liter	
0	0	0	
1	0	3	↲ Befülle den 3-Liter-Krug
2	3	0	↲ Fülle das Wasser in den anderen Krug
…	…	…	

Aufgabe 2 (Anzahl effizienter Lösungen)

Wir kommen zurück zu der Situation mit einem 5-Liter- und einem 3-Liter-Krug. Ihr könnt auf mehr als eine Art und Weise 4 Liter abmessen. Um einen weiteren Lösungsweg zu erzeugen, könntet ihr z.B. zuerst den 5-Liter-Krug zehn Mal auffüllen und entleeren. Dies ist natürlich ineffizient.

Die folgenden Handlungen nennen wir ineffizent:

i. eine Aktion, die man zuvor durchgeführt hat, rückgängig machen (wenn das überhaupt möglich ist)
ii. einen teilweise gefüllten Krug im Spülbecken entleeren
iii. einen teilweise gefüllten Krug unter dem Wasserhahn weiter befüllen
iv. weitermachen, wenn die Zielmenge bereits erreicht ist

Also sind folgende Schritte aufgrund der Regeln i,ii,i,iii ineffizient:

5Liter	3Liter
2	3
5	0
2	3

5Liter	3Liter
2	3
0	3

5Liter	3Liter
0	0
5	0
5	3
0	3

5Liter	3Liter
2	3
5	3

a) Erkläre, warum die Handlungen ii und iii ineffizient sind.

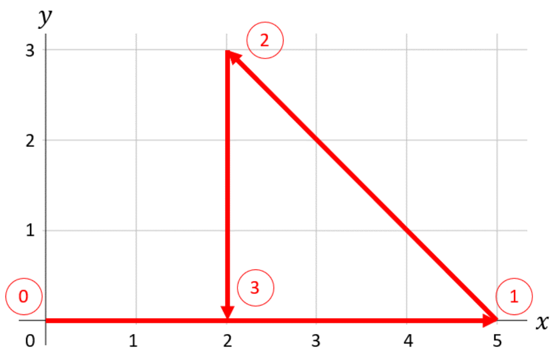
Wenn wir ineffizient arbeiten, gibt es unendlich viele Wege, um zu 4 Litern zu gelangen. Wenn wir effizient arbeiten, gibt es allerdings viel weniger Wege.

Bezeichnet den Inhalt des 5-Liter-Kruges mit x und den des 3-Liter-Kruges mit y. Ein ***Schritt*** bedeutet einen Übergang von einem Zustand zum nächsten Zustand, d.h. einen Krug befüllen, entleeren oder das Wasser von einem Krug in einen anderen umfüllen. Die Schritte in der untenstehenden Tabelle können graphisch als Pfad in einem Koordinatensystem dargestellt werden (siehe Figur 2).

Zustand	5 Liter x	3 Liter y
0	0	0
1	5	0
2	2	3
3	2	0

b) Aus den obigen „Regeln" gegen ineffiziente Handlungen geht hervor, dass der rote Pfad nur auf eine Art und Weise fortgesetzt werden kann. Erklärt, auf welche Art und warum.

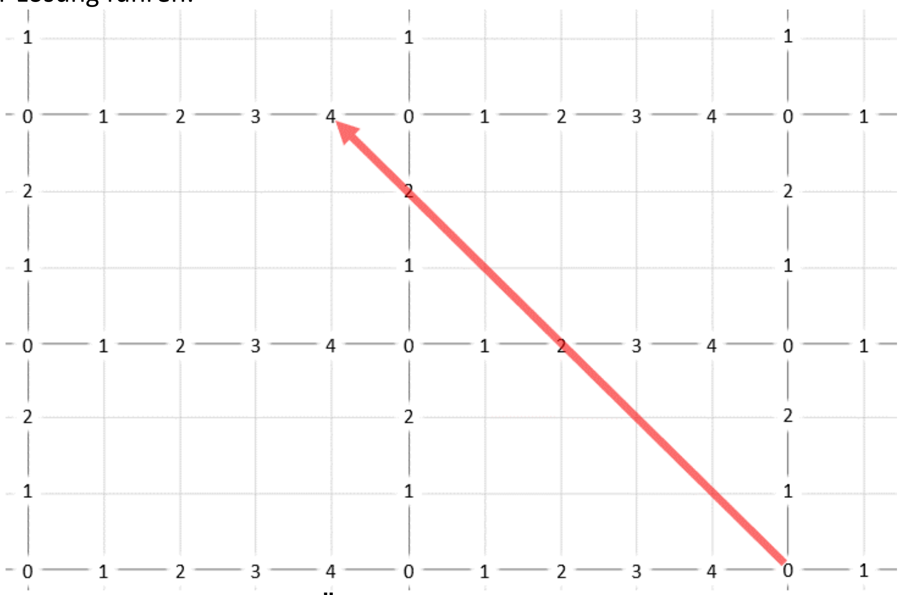
c) Nutzt diese Darstellung, um herauszufinden, wie viele effiziente Arten es gibt, 4 Liter abzumessen, wenn man einen 3- und einen 5-Liter-Krug verwendet (und beide Krüge zu Beginn leer sind). Erklärt eure Vorgehensweise und erläutert eure Argumente.



FIGUR 2. VIER ZUSTÄNDE UND DREI SCHRITTE (ROTE PFEILE) DES UMFÜLLPROZESSES

EXTRA: ERKUNDUNG[1]

Man kann die Darstellung aus Figur 2 ein wenig verändern und durch weitere Aktionen ergänzen, die dann zur Lösung führen:



FIGUR 3. DER UMFÜLLPROZESS ALS EIN EINZELNER PFEIL

Kopien des vorherigen Koordinatengitters wurden aneinandergelegt (siehe Figur 3). Die Pfeile, die das Auffüllen oder Entleeren eines Kruges darstellen, wurden hier weggelassen, denn es ist wegen der Effizienz bei jeder Aktion ganz klar, ob ein voller Krug entleert oder ein leerer Krug gefüllt werden soll. In dieser Darstellung ist das Befüllen und Entleeren also implizit (immer dann, wenn man eine Achse schneidet), mit dem Vorteil, dass wir statt Zickzack-Linien nur eine gerade Linie bzw. einen Pfeil betrachten.

Könnt ihr die 6 Schritte zur Lösung aus dem obigen Pfeil (insgesamt dreimal umfüllen, zweimal befüllen, einmal entleeren) rekonstruieren? Könnt ihr eine weitere effiziente Lösung in dieser Figur darstellen?

[1] Antworten zu einer Erkundung müssen nicht in die Bearbeitung mit aufgenommen werden.

Aufgabe 3 (unter Zuhilfenahme der Algebra)

Man kann das Problem auch in algebraische Sprache übersetzen. Wir betrachten den Umfüllprozess nun auf eine andere Art und Weise, bei der wir damit starten, den 5-Liter-Krug aufzufüllen und nach einer gewissen Anzahl von Schritten 4 Liter im 5-Liter-Krug erhalten.

a) Zeigt, dass die Inhalte jedes Kruges in jedem Zustand in der Form $5k+3l$ geschrieben werden können, wobei k und l (in jedem Zustand verschiedene) ganze Zahlen sind. Betrachtet dabei die einzelnen Zustände Schritt für Schritt.

Dass wir am Ende 4 Liter im 5-Liter-Krug erhalten können, bedeutet, dass es ganze Zahlen k und l gibt, so dass $4 = 5k + 3l$ gilt.

b) Welche Werte erhält man für das k und das l in der obigen Gleichung?

c) Könnt ihr diese Werte mit den Schritten, die ihr im Umfüllprozess vorgenommen habt, in Zusammenhang bringen (z.B. mit der Anzahl der Befüllungen, der Entleerungen und des Umfüllens)?

d) Könnt ihr einen Zusammenhang zwischen den Werten von k und l und einer Gleichung für die Linie in Figur 3 herstellen?

e) Könnt ihr noch andere Werte für k und l finden, sodass die Gleichung $4 = 5k + 3l$ erfüllt ist? Stehen diese Werte auch in Beziehung zu dem Umfüllprozess?

f) Wir möchten unsere Ergebnisse nun für den Umfüllprozess mit einem 5-Liter-Krug und einem 3-Liter-Krug verallgemeinern:

- Betrachtet andere Zielmengen als 4 Liter;
- Untersucht den Einfluss des Startschrittes.
- Untersucht, in welchem Krug die Zielmenge als erstes auftaucht.

Ihr könnt dabei die nachfolgende Tabelle verwenden:

Zielmenge	möglich?	Mindest-anzahl an Schritten	Anzahl der Umfüll-vorgänge	Anzahl der Füllvor-gänge	Anzahl der Leer-vorgänge	k	l	In welchem Krug?
0	ja	0	0	0	0	0	0	beide
1								
2								
3	ja	1	0	1	0	0	1	3
4								
5	ja	1	0	1	0	1	0	5

AUFGABE 4

Angenommen ihr habt einen m-Liter- und einen n-Liter-Krug, wobei m und n positive ganze Zahlen sind. In Aufgabe 1 tauchte bereits die Frage auf, welche Menge h im Allgemeinen abgemessen werden kann oder nicht abgemessen werden kann.

a) Untersucht diese Frage für Krüge mit $m = 4$ und $n = 6$ Litern.

b) Untersucht diese Frage für Krüge mit $m = 7$ und $n = 2022$ Litern.

c) Untersucht diese Frage im Allgemeinen und formuliert eine Hypothese. Nennt Argumente, die eure Hypothese stützen.

Tipps:

- Erstellt Tabellen wie in Aufgabe 3 f).
- Nutzt einen Graphen wie in Aufgabe 2.
- Probiert genügend Variationen von m und n aus, bis ihr ein Muster erkennt.
- Geht der Frage nach, warum diese Muster entstehen.

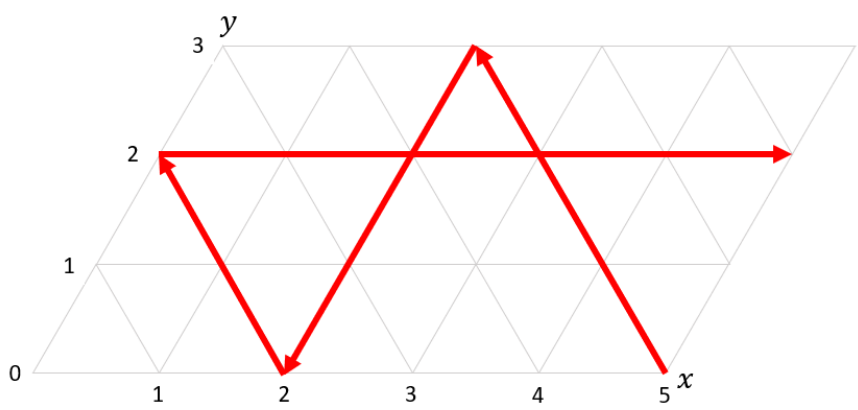
Auch in diesen Fällen kann man eine allgemeine Gleichung für die Menge h angeben:

$$h = m\,k - n\,l$$

a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Anzahl der Umfüllvorgänge und k und l in der Gleichung? Und wie sieht es mit der Anzahl der Leer- und der Füllvorgänge aus? Formuliert dafür eine Hypothese und nennt Argumente, die eure Hypothese stützen.

AUFGABE 5 (VON KRÜGEN ZUM BILLARD)

Wenn man das Koordinatensystem in Figur 2 ein wenig verzerrt, erhält man ein ähnliches Gitter, welches allerdings aus gleichseitigen Dreiecken besteht. Der Vorteil daran ist, dass aufeinanderfolgende Schritte darin so dargestellt werden können wie Reflexionen gegen die Kante, also z.B. wie der Weg einer Billardkugel auf einem Billardtisch, der die Form eines Parallelogramms besitzt.



FIGUR 4. DER UMFÜLLPROZESS ALS PFEILE IN EINEM DREIECKS-GITTER

Wenn ihr den obigen Weg vervollständigt (Macht dies bitte!), dann werdet ihr sehen, dass dieser eine Weg fast alle Gitterpunkte durchläuft, bevor er in (0|3) endet. Nur die Punkte (0|0) und (5|3) werden übersprungen.

Wie bei Aufgabe 4 können wir nun die Dimensionen des Billardtisches variieren – wir nennen diese m und n. Wir schauen uns die Wege der Bälle durch das Dreiecks-Gitter an. Die Knoten (m|0) und (0|n) können höchstens als Start- oder Endpunkt eines Weges dienen. Die Knoten (0|0) und (m|n) können nicht erreicht werden und spielen daher keine Rolle. Untersucht, wie die Anzahl der Wege von m und n abhängt.

Hinweise zur Lösung dieser Aufgabe:

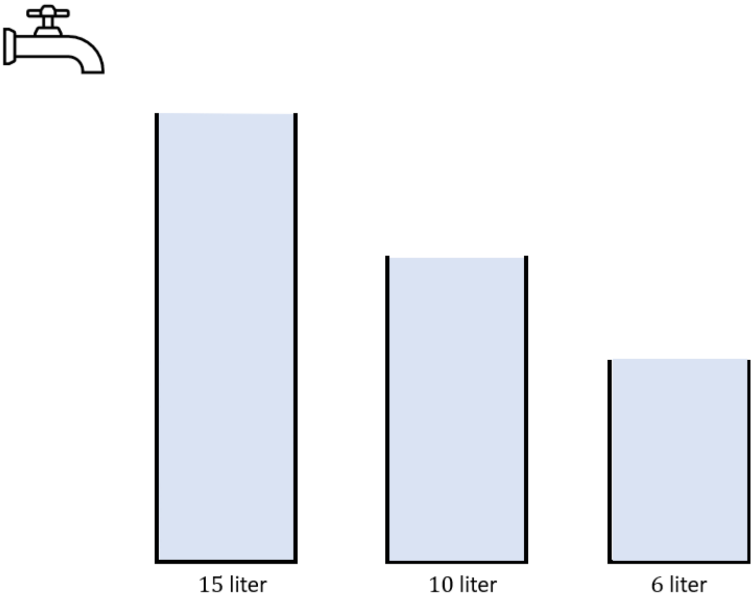
- Untersucht genügend konkrete Beispiele.
- Beschreibt immer, was passiert und warum dies passiert.
- Haltet Ausschau nach Mustern.
- Formuliert eine Hypothese.
- Nennt Argumente, die eure Hypothese stützen.
- Wenn eure Hypothesen sich als falsch erweisen, dann gebt ein Gegenbeispiel in an: Auch das ist ein interessanter Aspekt eurer Untersuchung.

Zusätzliche Aufgaben

Wählt eine (oder mehrere) der untenstehenden Aufgaben aus, die die Fragestellungen der Einführungsaufgaben vertiefen.

Aufgabe 6 (Verallgemeinerung)

Angenommen, es stehen drei Krüge zur Verfügung.



FIGUR 5. WAS KANN MAN MIT DIESEN DREI KRÜGEN ABMESSEN?

a) Untersucht das Problem für den Fall eines 6-, eines 10- und eines 15-Liter-Kruges (siehe Figur 5). Kann man damit 1 Liter abmessen?
b) Erklärt, ob es hier auch ein Modell zur Veranschaulichung gibt.
c) Wie viele effiziente Wege gibt es, um 1 Liter abzumessen?
Achtung: Hier müsst ihr eventuell die Definition des Wortes „effizient" anpassen!
d) Untersucht, welche Mengen mit einem *k*-Liter-Krug, einem *m*-Liter-Krug und einem *n*-Liter-Krug zusammen abgemessen werden können und welche nicht abgemessen werden können und formuliert eine Hypothese. *k,m* und *n* sollen dabei positive ganze Zahlen sein. Nennt Argumente, die eure Hypothese stützen.
e) Welche Aussage kann man über die Anzahl der effizienten Lösungen in diesem allgemeinen Fall treffen?
f) Verallgemeinert nun die Fragestellung und eure Lösung. Wie sieht es bei 4, 5 oder noch mehr Krügen aus?

Aufgabe 7 (π-Krug)

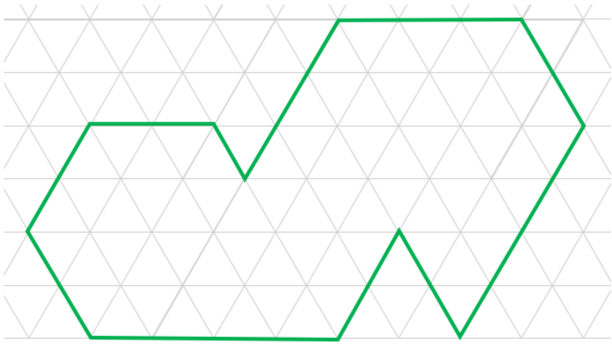
Angenommen, ihr habt zwei Krüge: einen 5-Liter- und einen π-Liter-Krug.

a) Erkläre, warum man 1-, 2-, 3-, oder 4-Liter-Mengen nicht abmessen kann.

b) Untersucht, wie nahe man an 1 Liter herankommen kann. Kommt ihr näher heran als $2\pi - 5$?
Erklärt in eurer Ausarbeitung genau, was ihr euch hierzu überlegt habt. Gebt euch nicht zu schnell zufrieden. Falls erforderlich, nutzt eine Tabellenkalkulation oder etwas dergleichen.

Aufgabe 8 (Billard)

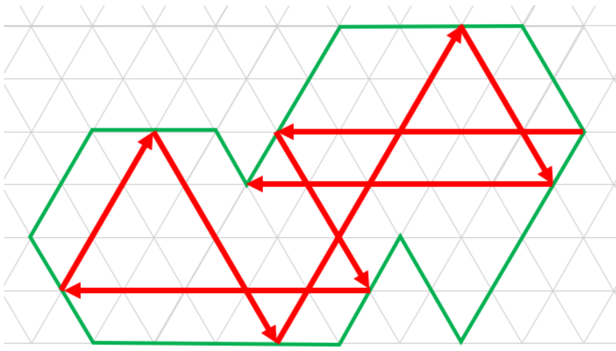
In dieser Aufgabe sollt ihr eure eigenen Billardtische auf Dreiecks-Gitter entwerfen. Die Ecken des Billardtisches liegen auf Gitterpunkten und die Seiten auf Gitterlinien. Die Kugel rollt nur über Gitterlinien innerhalb der grünen Grenze.



FIGUR 6. BILLIARD AUF EINEM DREIECKS-GITTER

Zunächst müssen wir über die Ecken eines solchen Billardtisches sprechen. Eckpunkte mit einem spitzen Winkel können über die Gitterlinien überhaupt nicht erreicht werden. Eckpunkte mit einem stumpfen Winkel können zwar erreicht werden, aber dabei kann man nicht vorhersagen, in welche Richtung sich die Kugel bewegen wird. Deshalb nutzen wir diese Punkte nur als Start- oder Endpunkt eines Weges.

Beispiel:

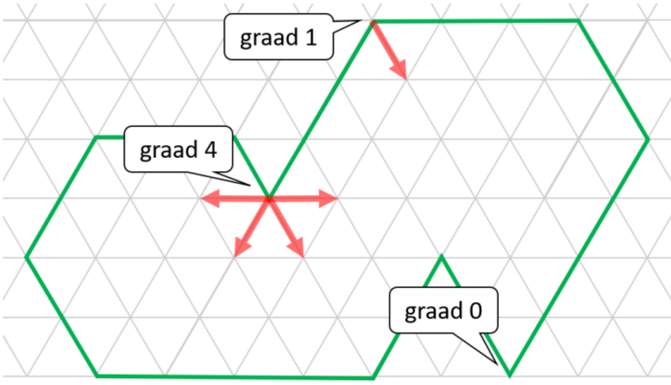


FIGUR 7. BEISPIEL EINES WEGES, DER IN EINEM ECKPUNKT BEGINNT UND ENDET

In Aufgabe 5 habt ihr eine Formel für die Anzahl der Wege auf einem Billardtisch in Form eines Parallelogramms mit den Längen *m* und *n* gesucht.

a) Könnt ihr eine solche Formel auch für Dreiecksbillardtische mit gleich langen Seiten der Länge *n* aufstellen? Könnt ihr weitere Klassen von Billardtisch-Formen entwerfen, bei denen man die Anzahl der Wege mit einer Gleichung berechnen kann?

Der Grad eines Eckpunktes ist die Anzahl der Richtungen, aus denen ein Weg kommen oder in die ein Weg von diesem Punkt aus verlaufen kann.



FIGUR 8. DER GRAD VON KNOTEN AUF DEM BILLIARDTISCH

b) Was kann man über die Summe aller Grade der Eckpunkte eines Billardtisches sagen? Und was zur Beziehung zwischen der Anzahl an Wegen und der Summe der Grade?
Welche Aussage könnt ihr über den Grad der Eckpunkte in euren Entwürfen aus Aufgabenteil a) und den Zusammenhang zu den entsprechenden Formeln machen?