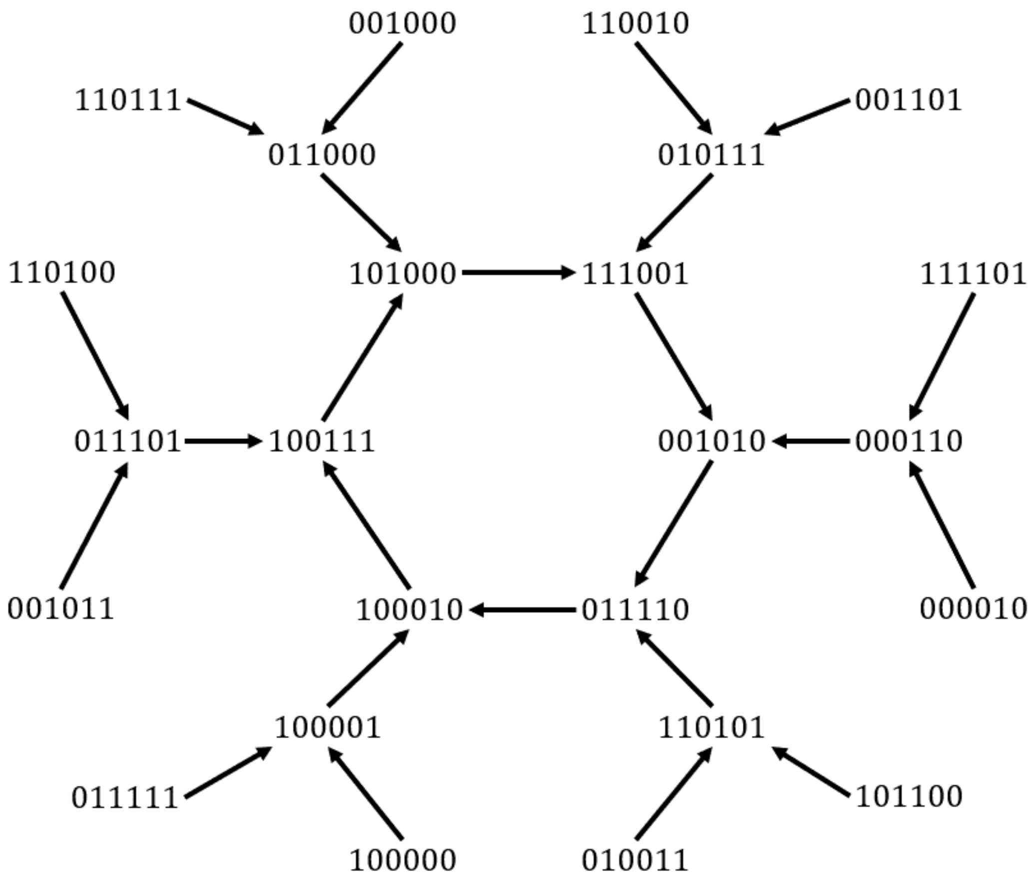
Mathematatik B-Tag 2023



Der Unterschied macht's!

macht mathe
internationale Mathematikwettbewerbe

Universiteit Utrecht

Wiskunde voor teams
Freudenthal Institute

EINLEITUNG

ÜBER DIE AUFGABEN

Manchmal verbirgt sich hinter einem einfachen mathematischen Konzept eine eigene Welt. Heute werden wir eine solch wunderbare Welt über einen sehr einfachen Zugang entdecken. Beginnend mit einer Folge von Zahlen werdet ihr durch das Bilden von Differenzen dieser Zahlen neue Folgen herstellen. Es scheint vielleicht zunächst, als wäre dies nichts Besonderes. Aber das täuscht: Wir werden dabei viel Spannendes entdecken!

ZUM TAGESABLAUF

Die Aufgaben des Mathematik-B-Tags sind zusammengesetzt aus Einführungsaufgaben und zusätzlichen, vertiefenden Aufgaben. Anders als im normalen Mathematikunterricht müsst ihr nicht alle Aufgaben lösen. Die Schwierigkeit der Aufgaben variiert zwischen leicht und schwer. Um euch den Weg zu erleichtern, gibt es zu einigen Aufgaben Hinweise zur Vorgehensweise. Es ist ganz normal, dass ihr nicht alle Aufgaben lösen werdet. Versucht bitte trotzdem in eurer Ausarbeitung zu zeigen, was ihr probiert habt und wie weit ihr gekommen seid – zum Beispiel mit Hilfe der Hinweise. Nachdem ihr genügend Zeit mit den Einführungsaufgaben verbracht habt, solltet ihr eine oder mehrere der weiterführenden Aufgaben auswählen, um das Thema zu vertiefen. Mit dem erfolgreichen Lösen der vertiefenden Aufgaben kann sich euer Team besonders auszeichnen.

TEAMARBEIT

Das Besondere am Mathematik-B-Tages ist, dass ihr gemeinsam in Teams Mathematik betreibt. Es kann daher sinnvoll sein, einen Zeitplan für den Tag zu machen und die Aufgaben untereinander aufzuteilen. Nutzt dabei die verschiedenen Stärken eurer Teammitglieder. Gebt allen die Möglichkeit, Ideen und Ausarbeitungen einzubringen. Ihr könnt entweder zeitgleich an verschiedenen Aufgaben arbeiten oder euch zusammen ein Problem anschauen und dieses diskutieren, um zu einer gemeinsamen Lösung zu gelangen. Bei einigen Aufgaben ist es sinnvoll, sich verschiedene Beispiele anzuschauen. Auch das kann man gut im Team aufteilen.

HILFSMITTEL

Für die Bearbeitung benötigt ihr heute: einen Stift, genügend (Schmier-)papier, die Aufgabenstellung, einen Computer oder ein Laptop, an welchem ihr eure Ausarbeitung verfassen könnt, sowie eine Tabellenkalkulationssoftware (wie Excel oder Google-Tabellen) oder eine Programmiersprache. Wir möchten euch davon abraten, das Internet zu benutzen. Solltet ihr dennoch Online-Quellen nutzen, müsst ihr die entsprechende Quelle angeben (URL). Die Verwendung von ChatGPT oder vergleichbarer Software ist nicht zulässig.

WAS MÜSST IHR EINREICHEN?

Im Laufe des Tages erstellt ihr einen Bericht in digitaler Form. Ihr solltet nicht zu spät beginnen, damit ihr diesen um 15 Uhr einreichen könnt. In eurer Ausarbeitung beschreibt ihr eure Überlegungen und Ergebnisse zu den einzelnen Aufgaben. Formuliert eure Lösungen überzeugend und deutlich in eigenen Worten.

Achtet bitte insbesondere darauf, die Arbeit als <u>ein</u> Gesamtdokument (bitte nicht in mehrere Dateien aufgeteilt) im pdf-Format (max. 8 MB) abzugeben. Um eine größtmögliche Objektivität bei der Korrektur zu gewährleisten, erwähnt bitte eure Namen und den Namen der Schule <u>nicht</u> in eurer Arbeit.

Wir freuen uns über gut geschriebene, genaue, vollständige und sorgfältig formulierte – und sicher auch originelle und kreative Berichte. Sowohl der mathematische Gehalt eurer Ausarbeitungen als auch die Qualität der Darstellung sind bei der Beurteilung ausschlaggebend.

Ein paar **Tipps** zum Schreiben und zur Form des Berichtes:

- Es kann sinnvoll sein, mit dem Schreiben von Teilen der Ausarbeitung bereits am Morgen zu beginnen.

- Formuliert so verständlich, dass jemand, der nicht am Mathematik-B-Tag teilgenommen hat (aber genügend Mathematik beherrscht), euren Text verstehen kann, ohne dass er/sie die Aufgaben gelesen hat. Das bedeutet, dass Antworten ausformuliert werden müssen und ihr nicht auf den Aufgabentext zurückverweisen dürft.

- Erforschungen und Begründungen sind das Herzstück des Mathematik-B-Tages. Wenn ihr Begründungen, Erklärungen und Erläuterungen erbringt, versucht diese so oft wie möglich mit mathematischen Argumenten zu unterstützen. Je genauer und detailliierter eure Argumentation ist, desto besser. Wenn ihr an einem Sachverhalt noch Zweifel habt, könnt ihr dies in eurer Ausarbeitung wie folgt angeben: "Wir vermuten, dass…".

- Verwendet Abbildungen, um eure Ideen zu verdeutlichen. Nutzt hier zum Beispiel Bilder von Zeichnungen, die ihr gemacht habt, indem ihr Screenshots oder Fotos von Abbildungen auf dem Papier einfügt.

EINFÜHRUNGSAUFGABEN

Angenommen, man hat eine endliche Folge ganzer positiver Zahlen: 7, 5, 1, 10. Dann kann man eine neue Folge bilden, indem man die Differenzen zwischen aufeinanderfolgenden Zahlen bildet: 7 – 5 = 2; 5 – 1 = 4; 1 – 10 = -9; 10 – 7 = 3, und dann die Beträge der Differenzen betrachtet: 2, 4, 9, 3[1]. Die letzte Zahl ist dabei der Betrag der Differenz zwischen der letzten und der ersten Zahl. Wir nennen dies den **Differenzschritt**.

Man kann dann den Differenzschritt auf diese neue Folge anwenden: Man erhält auf diese Weise: 2 – 4 = -2; 4 – 9 = -5; 9 – 3 = 6; 3 – 2 = 1, und somit 2, 5, 6, 1. Wenden wir dies noch einmal an, erhält man die Folge 3, 1, 5, 1. Diese Folgen kann man auch übersichtlich untereinander aufschreiben:

7	5	1	10
2	4	9	3
2	5	6	1
3	1	5	1

Wir nennen dies eine **Reihe von Zahlenfolgen**. Eine solche Reihe kann beliebig lang werden, indem man jedes Mal den Differenzschritt anwendet.

AUFGABE 1 (NUR ZUM AUSPROBIEREN)

a. Untersucht, wie es mit der Folge 7, 5, 1, 10 weitergeht, wenn der Differenzschritt immer wieder angewendet wird.

b. Untersucht diesen Sachverhalt mit genügend anderen Folgen von vier natürlichen Zahlen (das heißt aus der Menge 0, 1, 2, … usw.) und formuliert eine Vermutung[2] darüber, was passiert, wenn man den Differenzschritt oft genug durchführt.

Oben haben wir Folgen mit vier Zahlen betrachtet, oder anders gesagt: Folgen der Länge 4. Wir notieren n = 4. Ihr könnt den Differenzschritt wiederholt auch auf Folgen beliebiger Länge anwenden, z. B. auch auf Folgen der Länge 3, wie zum Beispiel

3	9	1
6	8	2
2	6	4
4	2	2
2	0	2
2	2	0

c. Untersucht genügend Folgen der Länge 3 und formuliert eine Vermutung darüber, was passiert, wenn ihr den Differenzschritt sehr oft durchführt.

[1] Das bedeutet, ihr könnt das Vorzeichen der Zahl ignorieren.

[2] Wenn wir euch bitten, eine Vermutung zu formulieren (und das werden wir später noch öfters tun), müsst ihr euch noch nicht sicher sein, ob das, was ihr schreibt, auch wirklich wahr ist. Beschreibt in euren Ausführungen, wie ihr auf eure Vermutungen gekommen seid.

Vielleicht seid ihr auf eine Folge gestoßen, die nach einer Reihe von Differenzschritten ausschließlich zu Nullen führt. Wir sagen dann, dass die zugehörige Reihe **erlischt**. So erlischt beispielsweise die Reihe, die mit der Folge 4,9 (der Länge 2) beginnt:

4	9
5	5
0	0

d. Beweist, dass jede Reihe von Zahlenfolgen der Länge 2 in zwei Schritten erlischt.

Wahrscheinlich seid ihr auch schon auf Folgen gestoßen, die mit einer Reihe von Zeilen endet, die sich immer und immer wieder wiederholen. Wir sagen dann, dass die Reihe **zyklisch** wird.[3]

Zum Beispiel wird die Reihe der obigen Folge 3, 9, 1 nach kurzer Zeit zyklisch: Sie setzt sich wie folgt fort:

2	2	0
0	2	2
2	0	2
2	2	0
0	2	2
2	0	2
…		

Aufgabe 2 (Das Leben einer Reihe verlängern)

Für die nächste Aufgabe könnt ihr die Tabelle verwenden, die ihr als EXCEL-Datei zur Verfügung gestellt bekommt. Ihr könnt auch ein eigenes Programm in Python (oder einer anderen Programmiersprache) dafür schreiben.

a. Findet eine Folge der Länge n = 3, deren zugehörige Reihe möglichst viele Schritte braucht, um zu erlöschen oder zyklisch zu werden. Ihr könnt die Zahlen von 1 bis 100 verwenden. Erklärt, warum es keine Reihe geben kann, die mehr Schritte benötigt, um zu erlöschen oder zyklisch zu werden.

b. Wiederholt die vorherige Aufgabe für n = 4.

Aufgabe 3 (Erlöschen oder zyklisch: eines von beiden passiert immer)

Wenn ihr die größte Zahl in einer Zeile vor dem Differenzschritt mit der größten Zahl in der Zeile nach dem Differenzschritt vergleicht, ist diese gleichgeblieben oder kleiner geworden. Zum Beispiel:

6	**8**	0	2	
2	**8**	2	4	gleich
6	**6**	2	2	kleiner
0	**4**	0	**4**	kleiner
4	**4**	**4**	**4**	gleich
0	**0**	**0**	**0**	kleiner

[3] Das Erlöschen ist eigentlich ein Spezialfall des Zyklisch-Werdens, denn die Folge von Nullen wiederholt sich.

a. Erklärt, warum die Zahlen in einer Zeile nach einem Differenzschritt nicht größer werden können.

Das Ziel ist es nun zu beweisen, dass eine Reihe nach einer endlichen Anzahl von Differenzschritten erlöscht oder zyklisch werden muss. Dies geschieht durch einen Beweis durch Widerspruch: Das bedeutet, dass man eine Aussage dadurch beweist, dass man zeigt, dass die verneinte Aussage zu einem Widerspruch führt und dadurch falsch ist. Wir nehmen also zunächst an, dass die Reihe einer gegebenen Folge weder erlöscht noch zyklisch wird. Dann darf in der gesamten unendlichen Reihe keine Zeile mehr als einmal vorkommen.

b. Warum darf in der gesamten unendlichen Reihe keine Zeile mehr als einmal vorkommen?

Es muss also unendlich viele verschiedene Zeilen von Folgen in der Reihe geben, da das Prinzip der Differenzbildung unendlich oft angewendet wird. Nehmen wir zum Beispiel an, die größte Zahl in einer Folge der Länge 4 sei die 12. Dann ist die größte Zahl, die in der gesamten Reihe vorkommt, aufgrund von Aufgabe a) ebenfalls 12. Es gibt aber nur endlich viele Folgen der Länge 4 mit der größten Zahl 12. (Prüft dies zunächst und berechnet gegebenenfalls die Anzahl der Möglichkeiten).

c. Verallgemeinert die Argumentation, um zu erklären, dass es nur endlich viele verschiedene Zeilen von Folgen in einer solchen Reihe geben kann.

Wir sind jetzt bei einem Widerspruch angelangt (der Beweis ist also erbracht!), denn einerseits muss die Reihe unendlich viele verschiedene Zeilen von Folgen enthalten, andererseits haben wir nach Teil c) aber nur endlich viele Möglichkeiten dafür.

Aufgabe 4 (Nullen und eine Eins)

Im Folgenden werden wir uns mit speziellen Reihen beschäftigen, die etwas länger sind. Wir beginnen mit einer Folge aus sieben Nullen und einer Eins wie im folgenden Beispiel:

0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1

a. Führt die Differenzschritte aus, bis die Reihe erlischt.

b. Untersucht Reihen beginnend mit Folgen der Form 0, 0, … 0, 1 (bestehend aus n-1 Nullen gefolgt von einer 1 für $n > 1$). Für welche Werte von n erlischt die Reihe und für welche wird sie zyklisch? Formuliert eine allgemeine Vermutung.

In einigen Reihen gibt es eine Art Wiederholungseffekt. Betrachten wir zunächst $n = 2$.

0	1
1	1

Die drei gefärbten Teile sind alle gleich. Dieses Muster ist der Baustein für die nächste Reihe von Zahlen bei $n = 4$:

0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
1	1	1	1

Das in n = 2 erkannte Muster wiederholt sich in Blau, Rot und Grün. Dies geschieht auch bei n = 8:

0	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

c. In Teil b habt ihr die Werte von n angegeben, für die ihr vermutet, dass die Reihe beginnend mit der Folge 0, 0, …, 0, 1 erlischt. Beweist nun diese Vermutung.

d. Was kann man über Reihen aussagen, die mit Folgen der Form 0, 0, …, 0, k (n-1 Nullen gefolgt von einer positiven ganzen Zahl k, nicht unbedingt 1) beginnen?

Aufgabe 5 (Phasen 1 und 2)

Wird eine Reihe zyklisch, gibt es einen besonderen Moment in einer solchen Reihe. Ab diesem Moment besteht die Folge nur noch aus Nullen und einer Zahl[4]. Zum Beispiel:

2	4	6	0	0	
2	2	6	0	2	
0	4	6	2	0	
4	2	4	2	0	
2	2	2	2	4	
0	0	0	2	2	← Ab diesem Moment
0	0	2	0	2	
0	2	2	2	2	
2	0	0	0	2	

a. Erklärt, warum eine Folge, die nur aus Nullen und einer weiteren Zahl a besteht (wie beispielsweise 0, 5, 0, 5, 5, 0), im Differenzschritt zu einer Folge wird, die wiederum nur aus Nullen und dieser einen Zahl a besteht.

Solange die Zeilen von Folgen einer Reihe mehr als zwei verschiedene Zahlen enthalten, sagen wir, dass sich die Reihe in **Phase 1** befindet. Ab dem Moment, in welchem der Prozess in eine Zeile mit nur 0 und a übergeht, befinden wir uns in **Phase 2**. In Teil a habt ihr erklärt, dass man nicht von Phase 2 zu Phase 1 zurückkehren kann. Umgekehrt scheint es so, dass Phase 1 immer in Phase 2 übergeht.

[4] Wenn man mit einer solchen Folge beginnt, gibt es natürlich keinen besonderen Moment.

b. Prüft, ob jede Reihe in Phase 1 nach weiteren Differenzschritten in Phase 2 übergeht. Wenn ihr zum Schluss kommt, dass dies der Fall ist, so begründet eure Vermutung. Falls ihr meint, dass die Aussage nicht stimmt, gebt ein konkretes Gegenbeispiel an.

AUFGABE 6 (EIN SCHRITT ZURÜCK)

Hat die Folge 6, 3, 2, 5 einen **Vorgänger**? Das meint: Kann diese Folge das Ergebnis eines Differenzschrittes sein? Die Antwort lautet in diesem Beispiel: Ja! Beginnt beispielsweise mit der Zahl 7. Dann muss die zweite Zahl 7 ± 6 sein, und so weiter. Ihr erhaltet dann zum Beispiel den Vorgänger 7, 13, 10, 12.

a. Könnt ihr einen anderen Vorgänger von 6, 3, 2, 5 finden? Beschreibt alle Vorgänger von 6, 3, 2, 5.

Wenn man allgemein mit Reihen argumentieren will, ist es praktisch, tiefgestellte Indizes zu verwenden: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ für eine Folge der Länge n. Zum Beispiel erhält man für die Folge 6, 3, 2, 5 eine Folge a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 = 6$, $a_2 = 3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 5$.

Im Allgemeinen stellt sich heraus, dass eine Folge a_1, a_2, a_3, a_4 genau dann einen Vorgänger besitzt, wenn es eine Wahl von „±-Zeichen" gibt, so dass

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 = 0.$$

Für die Folge 6, 3, 2, 5 ist $6 - 3 + 2 - 5 = 0$.

b. Untersucht, warum eine Folge a_1, a_2, a_3, a_4 genau dann einen Vorgänger besitzt, wenn es eine Auswahl von „±-Zeichen" gibt, so dass

$$\pm a_1 \pm a_2 \pm a_3 \pm a_4 = 0.$$

c. Verallgemeinert die Aussage und eure Argumentation aus Teil b auf Reihen der Länge n.

In Aufgabe 1 habt ihr sicher bemerkt, dass Reihen der Länge 3 niemals erlöschen, es sei denn, sie bestehen aus drei gleichen Zahlen. So erlöschen beispielsweise die Reihen beginnend mit den Folgen 4, 5, 6 und 3, 3, 8 nicht, die Reihen beginnend mit 2, 2, 2 und 9, 9, 9 dagegen schon.

d. Beweist, dass Reihen der Länge 3 niemals erlöschen, außer wenn sie aus drei gleichen Zahlen bestehen.

e. Was erwartet ihr für andere Reihen mit ungerader Länge? Beweist eure Vermutung.

.

VERTIEFENDE AUFGABEN: EIGENE FORSCHUNG

Wir laden euch nun dazu ein, eines (oder mehrere) der unten aufgeführten Themen durchzuarbeiten, um eigene Forschungen durchzuführen.

Zur Erinnerung: Eure eigene Forschungsarbeit besteht aus einer Einleitung zu den Differenzreihen auf der Grundlage eurer Erkenntnisse aus den einleitenden Aufgaben 1 bis 6. Daran schließt sich die Dokumentation eurer Vorgehensweise und eurer Ergebnisse zu mindestens einer der Untersuchungen an, die ihr aus den folgenden Optionen auswählen könnt.

FORSCHUNG 1: ERLÖSCHUNGSVERHALTEN

Es gibt noch viel zu entdecken und zu erforschen, wenn man sich mit dem Erlöschungsverhalten verschiedener Reihen auseinandersetzt. Hier sind einige Möglichkeiten:

- In Aufgabe 3 habt ihr gesehen, dass Reihen der Länge 2 immer erlöschen. Ihr habt sicher schon vermutet, dass auch Reihen der Länge 4 immer erlöschen. Beweist, dass Reihen der Länge 4 immer erlöschen.
- Wie lange es dauert, bis eine Folge von vier Zahlen erloschen ist, hängt davon ab, mit welchen Zahlen man beginnt. Untersucht den Zusammenhang zwischen den Startzahlen und der Anzahl der Schritte, die es braucht, bis eine Folge der Länge 4 erlöscht.
- Findet heraus, ob es eine Regelmäßigkeit gibt, wenn ihr untersucht, für welche Längen n alle Reihen dieser Länge erlöschen.

Hinweise:
Für die erste Möglichkeit: Verwendet die Erkenntnisse zu Aufgabe 4 und die Idee aus dem untenstehenden Kasten.

Addition von Zeilen
Falls ihr den ersten Aspekt der Aufzählung oben untersuchen wollt, könnt ihr die folgende Idee verwenden. Wir können nicht einfach zwei gleiche Reihen addieren:

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, denn $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ist keine entsprechende Reihe von

Zahlen.

Wenn man sich dagegen auf Zeilen mit nur 0 und a beschränkt (d. h. sich in Phase 2 befindet) und die Additionsregeln anpasst ist eine Addition machbar. Die entsprechenden Regeln sind: $0 \oplus 0 = 0$; $a \oplus 0 = a$; $0 \oplus a = a$ und $a \oplus a = 0$. Man erhält dann in diesem Beispiel

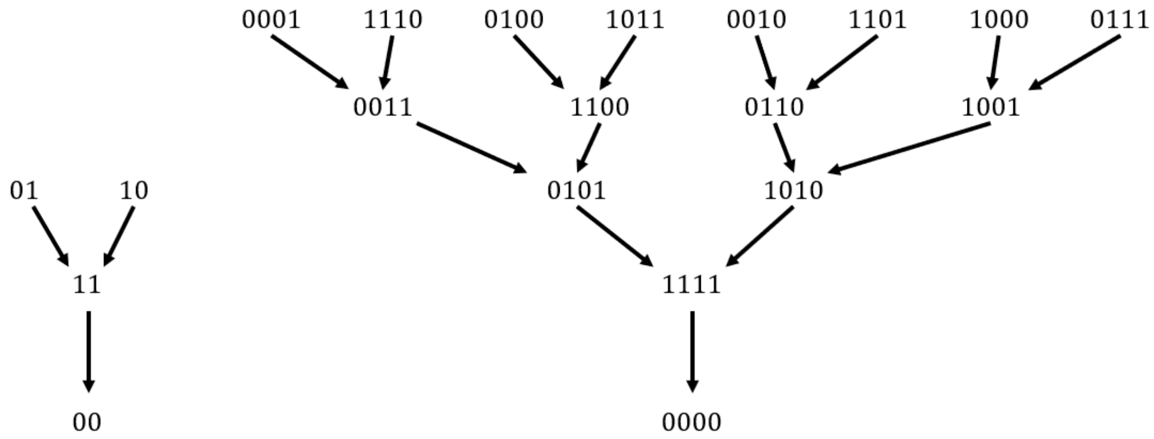
$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

und letzteres ist tatsächlich eine weitere Reihe von Zahlen. Ihr könnt diese Erkenntnis nutzen. Wenn ihr die Gültigkeit auch beweisen wollt, könnt ihr euch anschauen, wie sich diese Addition lokal verhält:

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a & 0 & \dots \\ \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & a & \dots \\ \dots & a & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = ?$$

FORSCHUNG 2: NULLBÄUME

In dieser Untersuchung konzentrieren wir uns auf Reihen in Phase 2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die eine Zahl, die nicht 0 ist, jeweils die 1 ist. Wir können dann ein Diagramm aus Zeilen und Pfeilen erstellen, wobei die Pfeile jeweils den Differenzenschritt darstellen. Wenn wir uns auf alle Zeilen mit Nullen und Einsen beschränken, die in einer **Nullzeile** (bestehend aus nur Nullen) enden, nennt man diese Darstellung den **Nullbaum**. Für n = 2 und n = 4 sieht dieser wie folgt aus:



In diesen Beispielen befinden sich tatsächlich alle möglichen Zeilen im Nullbaum. Für die Länge n = 3 ist dies dagegen nicht der Fall. Es existiert jedoch ein kleiner Nullbaum:

Die **Höhe** des Baums ist die Anzahl der Pfeile in einem Pfad, wenn man sich von der obersten Reihe entlang der Pfeile zur Nullreihe nach unten bewegt. Für jeden Wert von n gibt es einen Nullbaum, dessen Höhe jedoch variiert. Für n = 2 ist die Höhe zum Beispiel 2, für n = 3 ist die Höhe 1 und für n = 4 ist die Höhe 4.

Untersucht, wie sich die Höhe für verschiedene Längen n verhält und prüft, ob es hier eine Regelmäßigkeit gibt.

Hinweise

- Erläutert, warum jede Zeile im Nullbaum, die nicht die Nullzeile ist, keinen oder genau zwei Vorgänger besitzt.
- Verwendet die Erkenntnisse aus Aufgabe 4.
- In Aufgabe 6 wird erklärt, was genau ein Vorgänger einer Folge ist. Erklärt, warum eine Folge mit Nullen und Einsen nur dann einen Vorgänger hat, wenn es eine gerade Anzahl von Einsen gibt.
- Verwendet die Idee aus dem folgenden Kasten

Wiederholung von Zeilen

Für diese Untersuchung kann die folgende Idee genutzt werden: Wenn ihr eine Reihe von Folgen der Länge 3 habt, wie zum Beispiel

1	0	0
1	0	1
1	1	0

dann kann man daraus eine Reihe von Folgen der Länge 6 oder 9 machen, indem man die Zeilen wiederholt.

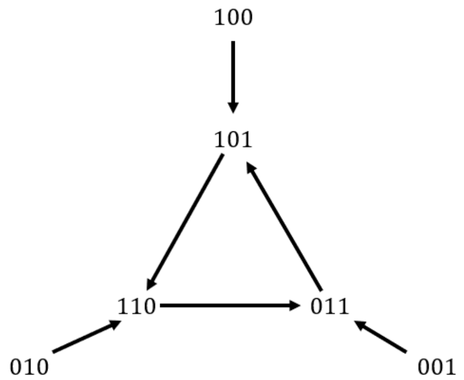
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0

1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0

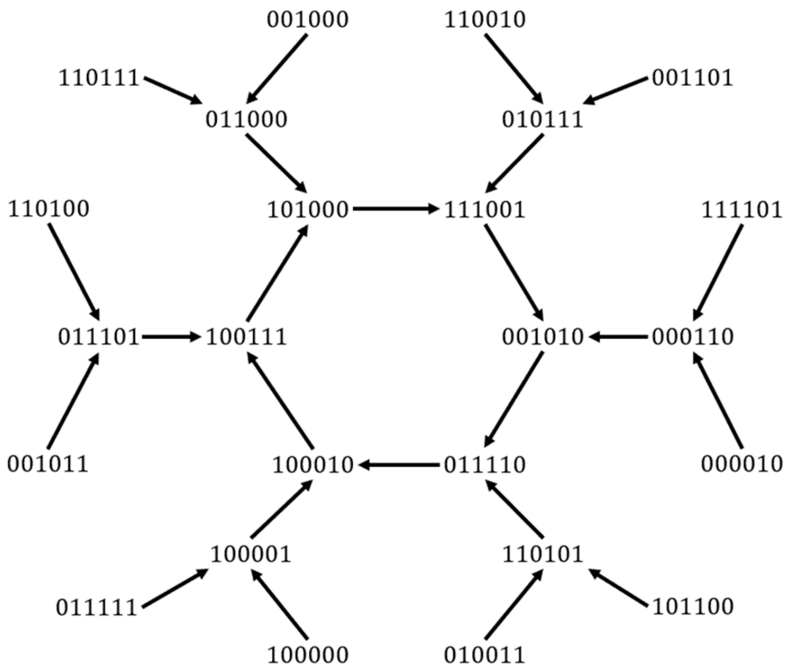
Diese Idee kann verallgemeinert werden. Erklärt in eurer Ausarbeitung, warum dieses Vorgehen funktioniert.

FORSCHUNG 3: FLUSSDIAGRAMME UND SCHNEEFLOCKEN[5]

Wir konzentrieren uns in dieser Untersuchung (wie auch in der vorherigen Forschungsaufgabe) auf die Reihen in Phase 2. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass die eine Zahl, die nicht 0 ist, die 1 ist. Ihr könnt dann ein **Flussdiagramm** erstellen, um zu zeigen, wie die Zeilen im Zusammenhang stehen. Für n = 3 sieht dieses wie folgt aus:



Links sieht man eine Art **Schneeflocke** und rechts dagegen nur den Übergang von 1, 1, 1 nach 0, 0, 0. Es stellt sich heraus, dass man sich Letzteres wie einen kleinen Baum vorstellen kann (siehe Forschung 2). Bei n = 6 erhält man ebenfalls eine Schneeflocke, die allerdings größer als die vorherige ist (siehe unten). Eine Schneeflocke besteht aus einem **Kreis** in der Mitte (unten ein Sechseck), an dessen Eckpunkten sich jeweils ein Baum befindet (z. B. bei 101000). Die Anzahl der Pfeile im Kreis bestimmt die **Ordnung** der Schneeflocke. So hat die Schneeflocke unten die Ordnung 6 und die obere Schneeflocke die Ordnung 3.



[5] Um sich auf diese Untersuchung vorzubereiten, ist es sinnvoll, die Einleitung zu Forschung 2 zu lesen.

Bei Reihen der Länge sechs besteht das Flussdiagramm neben dem Nullbaum und der Schneeflocke oben aus zwei weiteren Schneeflocken. Wie sehen diese aus? Es gibt insgesamt $2^6 = 64$ verschiedene Folgen der Länge 6, die nur aus Nullen und Einsen bestehen. Könnt ihr diese alle im Flussdiagramm finden?

Im Allgemeinen ist es ein Rätsel, wie viele Schneeflocken es für bestimmte Längen gibt und welche Ordnung diese haben. So besteht beispielsweise das Flussdiagramm für Folgen der Länge neun aus dem Nullbaum (mit Höhe 2), vier Schneeflocken der Ordnung 63 und einer Schneeflocke der Ordnung 3. Insgesamt gibt es 2^9 verschiedene Folgen der Länge 9 bestehend nur aus Nullen und Einsen. Davon befinden sich $126 \cdot 4 = 504$ in den Schneeflocken der Ordnung 63 und sechs Folgen in den Schneeflocken der Ordnung 3. Zusammen mit den zwei Folgen im Nullbaum ergibt sich dann die richtige Summe $512 = 2 + 4 \cdot 126 + 6$.

Untersucht für verschiedene Werte der Länge n, wie das vollständige Flussdiagramm von Reihen, die ausschließlich aus Nullen und Einsen bestehen, aussieht. Was kann man über die Anzahl der Schneeflocken sagen? Was über die Ordnung der Schneeflocken? Erkennt ihr Muster?

Hinweise:

- Für $n = 3$ und $n = 6$ gibt es jeweils eine Schneeflocke der Ordnung 3. Dies ist kein „Zufall". Wenn im Flussdiagramm von Reihen der Länge n ein Kreis der Länge k entsteht, so kommt ein Kreis der Länge k auch in allen Reihen vor, deren Länge ein Vielfaches von n ist. Erklärt diesen Zusammenhang. Auch hier könnt ihr die Idee der sich wiederholenden Zeilen nutzen (im Kasten zu Untersuchung 2).
- Zusatz: Was fällt euch auf, wenn ihr für verschiedene Werte von n die Höhe der Bäume, die sich an den Eckpunkten der Schneeflocke gebildet haben, mit der Höhe des Nullbaums (Begriff wird in Forschung 2 eingeführt) vergleicht?
- Mit Hilfe von Erzeugern können Kreise in Schneeflocken gesucht und beschrieben werden. Betrachtet dazu den untenstehenden Kasten.

Erzeuger

Bei $n = 5$ entsteht ein Kreis der Länge 15. Auch dies ist nicht ganz „zufällig". Seht euch die folgende Reihe an:

0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1

Betrachtet man die Reihen zyklisch, so hat sich 1 1 in der Reihe 0 0 0 1 1 nach vier Schritten um eine Stelle nach rechts verschoben. Dies wiederholt sich dann fünfmal: Nach vier weiteren Schritten erhält man 1 1 0 0 0 und so weiter, sodass sich schlussendlich ein Kreislauf bildet. Man kann sich die 1 1 als Erzeuger des Kreislaufs vorstellen. Dies kommt häufiger vor: In Flussdiagrammen von Reihen der Länge 17 gibt es zum Beispiel eine Schneeflocke der Ordnung 255, die durch die 1 1 erzeugt wird. Dies funktioniert noch allgemeiner. Man kann einen Kreis durch die Angabe eines Erzeugers beschreiben. Zum Beispiel werden die vier Schneeflocken bei $n = 9$ durch 1 1, 1 0 0 1, 1 0 1 1 1 und 1 1 1 0 1 erzeugt.